ALGUNOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA EN SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2×2 PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

YESID BECERRA RODRÍGUEZ

FVTVRVM ÆDIFICAMVS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

FACULTAD CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MAESTRIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

2019

ALGUNOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA EN LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2×2 PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

YESID BECERRA RODRÍGUEZ

Trabajo de grado presentado al programa de Maestría de Educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, como requisito parcial para optar al título de Magister en Educación Matemática

Director: Dr. JOSÉ FRANCISCO LEGUIZAMON ROMERO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

2019

Dedicatoria

En primer lugar, a Dios Todo Poderoso por darme la oportunidad de adquirir mi título de Magíster en Educación Matemática. En segundo lugar, a la memoria de mi padre y en tercer lugar a mi madre Ana Socima Rodríguez por apoyarme en el transcurso del proceso académico y personal, de igual manera a mi Hermana Luz Yisenia y mis hermanos, Oscar Daniel, Memo, Edi, Nando y mi sobrina Daniela Becerra, por estar presentes en todo momento de mi formación posgraduada.

Agradecimientos

A Dios por brindarme la oportunidad de culminar la maestría y haberme acompañado en el desarrollo de la misma.

Al Doctor José Francisco Leguizamón Romero por el acompañamiento en el desarrollo del trabajo de grado, por el tiempo dedicado y por el aporte de sus conocimientos y experiencia que permitieron enriquecer esta investigación.

A los profesores jurados, por el tiempo dedicado a la lectura y ajuste del informe final del trabajo de grado.

A los estudiantes de 10° y 11° de la Institución Educativa Rafael Reyes de Santa Rosa de Viterbo (Boyacá) por la participación en el desarrollo de la investigación.

A los compañeros y compañeras de la III cohorte de la Maestría que apoyaron desde sus conocimientos y experiencia para que fuera posible llevar a cabo el desarrollo de esta investigación.

¡Muchas gracias!

CONTENIDO

Índice de tablas

Índice de imágenes

Índice de figuras

Índice de esquemas

Introducción

La investigación pretende potenciar en estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Rafael Reyes de Santa Rosa de Viterbo-Boyacá (IERRSRVB) la competencia resolución de problemas relacionados con sistemas de ecuaciones lineales 2×2, por medio de la articulación de las actividades cognitivas de *formación, tratamiento* y *conversión* de los registros de representación semiótica, teniendo en cuenta que el objeto matemático "sistemas de ecuaciones" es accesible a través de sus diferentes representaciones. Se hizo un recorrido histórico sobre la Semiótica, hasta llegar a Raymon Duval (1999) que proporciona el marco teórico adecuado para solucionar la problemática planteada, también se tuvo en cuenta los aportes de Bruno D' Amore (2005 y 2006) entre otros, para resolución de problemas se utilizó la heurística de Polya (1965).

Para el logro de los objetivos específicos de esta investigación se realizó un cuestionario diagnóstico, un análisis del texto guía utilizado para orientar la temática en la Institución, además se diseñó actividades, teniendo en cuenta la *formación, tratamiento* y *conversión* de los registros de representación semiótica, para su posterior aplicación. Respecto a la *conversión,* se articuló los siguientes registros: del gráfico al tabular, del tabular al algebraico, del gráfico al algebraico, del verbal al algebraico, del algebraico al tabular, del tabular al gráfico, del verbal al gráfico, del gráfico al algebraico, que son prioritarios en los niveles de la Educación Media. Por último, validar cada una de las actividades tanto para solucionar la problemática y como guía para el docente al momento de abordar el tema de sistemas de ecuaciones lineales 2×2 en grado noveno de la educación básica secundaria. El enfoque de investigación que se utilizó es de tipo mixta, con predominio cualitativo, la cual se basó en las cuatro fases que propone Artigue (1995) de la ingeniería didáctica.

Planteamiento del problema

La actividad matemática de resolución de problemas relacionados con sistemas de ecuaciones lineales 2×2 hace parte del pensamiento variacional, y de los sistemas algebraicos y analíticos, establecidos en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (2006) propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998). Estos sistemas se consideran de gran importancia en la formación matemática en grado noveno de la educación básica secundaria y por ende se contemplan en el plan de estudios de la IERRSRVB.

Durante el proceso de formación matemática en los niveles de educación media, los estudiantes presentan dificultad para resolver problemas que requieren plantear un sistema de ecuaciones lineales 2×2, en su mayoría no muestran la *conversión* de un registro de representación a otro, y "se ha probado que cambiar la forma de una representación es, para muchos alumnos de los diferentes niveles de enseñanza, una operación difícil e incluso en ocasiones imposible" (Duval, 1999, p.28).

Otra de las dificultades es encontrar la solución a un sistema cuando utilizan métodos algebraicos, no hacen *tratamientos* a las ecuaciones lineales que lo conforman y pocas veces acuden al método gráfico para encontrar la solución, de acuerdo con Ramírez (1997) "no efectúan la representación y resolución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales, dándole un estatus inframatemático a este registro de representación" (citado en Segura, 2004, p.52). Sin embargo, Pérez (1998) dice que "no realizan en forma correcta el pasaje del registro verbal al algebraico de un problema que involucre un sistema de ecuaciones lineales y recurren pocas veces al pasaje del registro gráfico al algebraico para resolver un sistema de ecuaciones lineales" (citado en Segura, 2004, p .52). Rivera (2010) afirma "que los estudiantes presentan deficiencia al momento de plantear el sistema de ecuaciones y definir en variables" (p.14). Esto manifiesta que no hay una comprensión integral del objeto matemático sistema de ecuaciones lineales $2\ x\ 2$, de acuerdo con García (2014):

> Existe un salto en la enseñanza del concepto SEL 2×2 (sistema de ecuaciones lineales 2×2), ya que se parte del saber actual, que se presenta mediante el modelo algebraico, sin desconocer en este lenguaje su gran importancia como herramienta para la resolución de diferentes tipos de problemas, pero que genera dificultades en la interpretación y falta de significación en el estudiante, cuando no se articula con otros lenguajes en la resolución de problemas (p.23-24).

Por lo tanto, Duval (1999) afirma:

> La conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la mayoría de los alumnos. No sólo el cambio de registros ocasiona obstáculos que son independientes de la complejidad del campo conceptual en el que se trabaja; también con mucha frecuencia, la ausencia de coordinación entre los diferentes registros genera un obstáculo para los aprendizajes conceptuales (p. 46).

Finalmente, existe una disociación entre los diferentes registros de representación semiótica en los procesos de enseñanza y aprendizaje del tema resolución de problemas relacionados con sistemas de ecuaciones lineales 2×2, es por esto, conduce a presentar dificultades en las actividades cognitivas de *formación, tratamiento y conversión* de los registros.

Para los estudiantes de grado 10° de la IERRSRVB una vez visto el tema en el grado anterior no son ajenos a esta problemática y por tal motivo se plantea la siguiente pregunta de investigación. ¿Cómo las actividades cognitivas de *formación, tratamiento y conversión* de los registros de representación semiótico fortalecen la competencia de resolución de problemas relacionados con el objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales 2×2 ?

A continuación se presentan las preguntas de menor alcance.

¿Qué registros de representación semiótica utiliza un libro guía para desarrollar el tema sistema de ecuaciones lineales 2×2?

¿Cuáles actividades cognitivas de *tratamiento* y *conversión* de los registros de representación semiótica manejan los estudiantes del grado décimo de la IERRSRVB respecto al objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales 2×2?

¿Qué actividades permiten al estudiante de grado décimo de la IERRSRVB articular registros de representación en la resolución de problemas, relacionados con sistemas de ecuaciones lineales 2×2?

¿A cuál método y representación acude los estudiantes de grado décimo de la IERRSRVB para solucionar un problema relacionado con el objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales 2×2?

Objetivos

Objetivo general

Analizar las actividades cognitivas (*formación, tratamiento y conversión*) de los registros de presentación semiótica en la resolución de problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales 2×2, en estudiantes de grado décimo de la IERRSRVB.

Objetivos específicos

Identificar los registros de representación semiótica que se encuentran en un libro guía para presentar el tema sistemas de ecuaciones lineales 2×2.

Determinar las actividades cognitivas *tratamiento* y *conversión* de los registros de representación semiótica que manejan los estudiantes de grado décimo de la IERRSRVB en torno al objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales 2×2.

Analizar la solución de problemas relacionados con sistemas de ecuaciones lineales 2×2 propuesta por los estudiantes de grado décimo de la IERRSRVB, cuando se articulan las actividades cognitivas de los registros de representación semiótica, en el diseño y aplicación de actividades.

Identificar el método y las representaciones que utilizan los estudiantes de grado décimo de la IERRSRVB, para la solución de un sistema de ecuaciones lineales 2×2 , cuando participen de las actividades diseñadas para tal fin.

Justificación

La problemática surge de la experiencia en la educación media donde los estudiantes tienen que solucionar problemas que implican plantear sistemas de ecuaciones lineales, desde diferentes registros de representación semiótica, para luego solucionarlo por algún método algebraico como: eliminación, sustitución, igualación, determinantes o método grafico; algunos no plantean el sistema de ecuaciones correctamente porque hay dificultad en la conversión entre registros, y de acuerdo con Duval (2006) "¡La conversión de representación semiótica aparece a menudo como un truco que no puede ser bien aprendido y que no es enseñado!" (p.149). Esta dificultad, se presenta por la falta de dominio sobre los conceptos previos, como: despejar ecuaciones, diferenciar una ecuación implícita de una explícita, construir una tabla de valores y graficar ecuaciones lineales, esto impide llevar a cabo la formación matemática de cada educando. De acuerdo con Guzmán (1990) citado en Segura (2004) "algunos libros de texto y algunos profesores apuntan al desarrollo algorítmico, no trabajan los pasajes del registro algebraico al verbal, ni del gráfico al algebraico" (p.52).

Esta investigación da a conocer el manejo adecuado de la articulación de algunos registros de representación semiótica bajo las actividades cognitivas de *formación, tratamiento y conversión*, mediante el diseño y validación de actividades; con la finalidad de solucionar la problemática, y que sean de apoyo en el aula para favorecer y facilitar la resolución de problemas relacionados con sistemas de ecuaciones lineales $2\ x\ 2$. Según Ibarrada, Bravo, Grigalda (2000-2001) el "uso de los registros de representación semiótica, ha fortalecido el aprendizaje de la matemática y favorece su enseñanza cuando se proponen actividades didácticas donde se tenga que utilizar y articular estos registros" (p.108). D' Amore (2006) plantea:

> No es suficiente que exista un desarrollo de cada registro; la coordinación de los diferentes registros de los que el sujeto dispone o que la enseñanza se esfuerza que los adquiera (por ejemplo, el de la escritura algebraica) requiere de cualquier manera su coordinación (…). En todo caso, la coordinación de registros es la condición para una diferenciación real entre los objetos matemáticos y su representación (p. 274).

Marco referencial

Antecedentes internacionales

Inicialmente, en Figueroa (2013) en su trabajo de maestría, desarrollado en la Pontificia Universidad Católica del Perú, tiene como objetivo el diseño de una propuesta didáctica orientada al fortalecimiento de las habilidades de resolución de problemas relacionados a sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. La metodología utilizada fue la ingeniería didáctica, teniendo en cuenta las cuatro fases: análisis preliminar, concepción y análisis a priori, experimental, análisis a posteriori y validación, su muestra estuvo conformada por 15 estudiantes de cuarto año de secundaria con edades de 14 y 15 años. Como instrumentos utilizó una evaluación denominada exploración académica y cinco secuencias didácticas. En esta investigación se concluyó que las situaciones diseñadas contribuyeron a: consolidar aprendizajes y estimular en los alumnos la habilidad de crear problemas relativos a sistema de ecuaciones lineales con dos variables, donde el reto de proponer situaciones llevó a una mejor comprensión del uso de este objeto matemático.

Un segundo estudio realizado por Marroquín (2009), pretendió explorar sobre la concepción, comprensión y la habilidad matemática que tienen los estudiantes de Ingeniería Agroindustrial, respecto al concepto de ecuaciones lineales en dos variables, basados en los procesos de visualización y registros de representación del objeto. La metodología de investigación es de tipo cualitativa a nivel experimental, donde la población y muestra fueron estudiantes de primer semestre de Ingeniería Agroindustrial entre las edades de 18 a 20 años. Para realizar la recolección de datos se usaron tres tipos de instrumentos: un cuestionario diagnóstico, una serie de secuencias de actividades problemáticas y registros con cámara filmadoras que muestre las actividades de acción, formulación y validación de la secuencia didáctica.

Se concluyó que las respuestas de los estudiantes en la medida que las tareas fueron desarrolladas, muestran que tienen idea intuitiva sobre el concepto de ecuaciones lineales con dos variables, llevándolos a pensar que el objeto matemático es una expresión de números y letras, el cual sería coherente si se articula lo expresado en registro verbal, con expresiones algebraicas y su gráfica. Esta es la razón por la cual el estudiante utiliza un proceso enfatizando en la instrucción algebraica, evitando que piense en el desarrollo conceptual, que le permita construir representaciones semióticas para la resolución de problemas, tanto personales como facilitar la comunicación a otros. Además, los estudiantes no muestran claridad y seguridad en la conversión del registro gráfico al algebraico esto indica la falta de coordinación que el alumno tiene sobre estos registros. Sin embargo, manifiestan su preferencia por las representaciones algebraicas proporcionando un camino para la resolución de problemas.

Un artículo publicado por Segura (2004), tiene como propósito el diseño y aplicación de una secuencia de enseñanza, que facilite el aprendizaje y solución de los sistemas de ecuaciones lineales. La metodología utilizada fue la Ingeniería Didáctica, que se caracterizó por tener un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas. En este proceso se distinguen cinco fases: análisis preliminar, concepción y análisis a priori, experimentación, análisis a posteriori, y confrontación interna de análisis a priori y posteriori, se diseñó una secuencia didáctica como instrumento para recolectar información.

Dentro de las conclusiones se tiene que: la metodología de la Ingeniería Didáctica, es un primer paso como modelo para investigaciones posteriores proponiendo otras secuencias que conlleven al alumno a resolver sistemáticamente un sistema de ecuaciones lineales, que le permite desarrollar comportamientos matemáticos y cognitivos.

Otra es respecto al reconocimiento del objeto de ecuaciones lineales, dadas en forma algebraica, se trabajó con tres registros facilitando al estudiante que identifique al objeto, teniendo en cuenta que se utilizan distintas formas de simbolizarlo.

Antecedentes nacionales

El estudio realizado por Alzate (2018) en la Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín, tenía como finalidad diseñar una estrategia didáctica mediada por las TIC para el fortalecimiento del proceso de la representación simbólica de situaciones problema que involucran los sistemas de ecuaciones lineales 2×2, en el grado 9º de la I. E. Manuel Uribe Ángel. La metodología utilizada es la investigación acción educativa, siguiendo cuatro fases, la primera es realizar un diagnóstico, la segunda es establecer un plan de acción, la tercera buscar poner en práctica el plan de acción; por último, es la reflexión de lo observado.

Los instrumentos de recolección de información fueron diseñados con base en las fases antes mencionadas y son: una prueba diagnóstica enfocada a determinar fortalezas, debilidades y aprendizajes que tienen los estudiantes frente a la trasformación del lenguaje matemático y viceversa, respecto al video juego erudito desde su plataforma virtual presentó resultados obtenidos de cada estudiante participante; finalmente una post- prueba que tenía la misma estructura de la diagnóstica para luego realizar la comparación de ambas pruebas. Lo anterior se realizó con 40 estudiantes de grado noveno con edades entre 14 y 18 años de la Institución Educativa Manuel Uribe Ángel.

Se concluye que en los procesos de *conversión* de un sistema de representación verbal a un sistema de representación simbólica, inicialmente los estudiantes no tienen noción del concepto de variable o incógnita bien definida, por consiguiente no realizaron relaciones entre variables para establecer expresiones algebraicas. Además, no identificaron palabras del lenguaje común que le permitieran establecer las relaciones entre las variables como: el doble, triple, la cuarta parte, aumentado, disminuido, para poder vincularlas a un lenguaje matemático, en efecto se muestra dificultad en la conversión de un sistema de representación semiótico a otro de forma correcta.

Finalmente, el estudio realizado por García (2014) de la Universidad Nacional de Colombia Sede Palmira, tenía el propósito de validar la ingeniería didáctica, como metodología que favoreciera el desarrollo de competencias en el proceso de aprendizaje de los sistemas ecuaciones lineales, su solución y aplicación, basándose en una secuencia de enseñanza aplicada a un grupo de estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Humberto Raffo Rivera de Palmira. La metodología fue de tipo cualitativo mediante un estudio de caso utilizando las cuatro fases de la ingeniería didáctica.

Se concluye que, los textos guía no consideran la transición entre las funciones y los sistemas de ecuaciones, a través de una situación presentada en el registro verbal, que permita afianzar y dar significado a las nociones de variable, transformación de ecuaciones lineales y su pasaje a las gráficas en el plano cartesiano. De acuerdo a la aplicación de la ingeniería didáctica se desarrolló el proceso de comprensión y resolución de los sistemas de ecuaciones lineales, además se logró el aprendizaje de la temática de forma eficiente, en contraposición al método tradicional de enseñanza que lo hace de manera dispersa dejando como resultados vacíos conceptuales. De manera general la secuencia facilitó la selección de estrategias que favorecieron el desarrollo de competencias matemáticas como la transición de registro numérico al algebraico, sin embargo, se debe corregir o reafirmar otros métodos de construcción de gráficas.

Marco teórico

En primer lugar, el término semiótica fue utilizado por los griegos desde la escuela de Hipócrates que se enfocó en indicar la ciencia de los síntomas en la medicina, esto es, la "semioitiké teche" para la división de las enfermedades en diagnosis y prognosis, también, la tradición griega utilizó el término de la "semiosis" como la inferencia de signos, que proceden de semeion referente a signo o señal. De acuerdo con Leguizamón (2017), sobre el concepto de semiótica no hay una unificación de criterios para definirla en el sentido de si es ciencia o no, al igual, que la utilidad en otras disciplinas y sobre si debe llamarse semiótica o semiología. Fue en Estados Unidos donde se optó por el término de semiótica, como se conoce hoy en día, mientras en Francia se utilizó el término de semiología. Sin embargo se presentan dos perspectivas sobre semiótica por los pioneros de la época contemporánea Peirce y Saussure.

La semiótica para Peirce, es considerada como la doctrina formal de los signos, en el sentido que permiten representar algo que está en lugar de alguna otra cosa para alguien en ciertos aspectos o capacidades. Se enfatiza en que los individuos utilizan signos para formar nuevas ideas y conceptos, por tanto los signos son medios de pensamiento. Por otro lado la semiótica para Peirce "es una teoría de los signos independiente de la lingüística como ciencia y del lenguaje como fenómeno comunicacional relevante, todos los sistemas de signos son importantes y el lenguaje hablado es tomado como un caso particular" (Leguizamón, 2017, p.98).

Saussure fue un lingüista de origen suizo, quien dio inicio y desarrollo al estudio de la lingüística haciendo énfasis en los signos; hace la diferencia primordialmente entre lengua y palabra. La palabra la consideraba de orden subjetivo y la lengua la concebía como orden social en el sentido que "la lengua es un sistema de signos que expresan ideas y, por esa razón, es comparable con la escritura, el alfabeto de los sordomudos, los ritos simbólicos, las formas de cortesía, las señales militares, etc.” (Eco, 2000, p.31). La definición de signo para Saussure tiene dos elementos el significado y el significante, la relación entre ellos se evidencia en que el concepto se refiere al (significado) y la imagen acústica asociada al (significante); se dice que cuando un sujeto habla en una lengua desconocida pareciera que estuviéramos escuchando sonidos sin significado, es decir, no hay comprensión y desde luego no se podría analizar, por el contrario si se sabe lo que se habla se puede atribuir algún significado lo cual se tendrá signos con significado (Leguizamón, 2017).

Por consiguiente, los signos son miembros activos de un sistema donde expresan ideas, en el sentido que tiene significado cuando se encuentran en un contexto determinado o relacionado con otros signos, por ejemplo: Saussure plantea una analogía con el caballo en el juego del ajedrez, diciendo que esta es una pieza material y no representa nada para el jugador estando fuera de su casilla y en otras condiciones del juego. Esta pieza material se convierte en elemento real y concreto, hasta cuando reviste el valor atribuido en las reglas del juego especialmente en la posición real en el tablero y sus movimientos. Y así ocurre con los signos en contexto. Por otro lado se tiene los aportes de semiótica de dos representantes de la pedagogía Vygotsky y Piaget.

La semiótica de Vygotsky fue fundada como respuesta al problema del pensamiento y su desarrollo. De manera puntual, Vygotsky (1988) define el signo como un mediador entre un individuo y el entorno, que “permite pasar de lo intersicológico lo cual se desarrolla entre personas y lo intrasicológico que permite su internalización. Afirma que el gesto va dirigido inicialmente hacia alguien y luego hacia sí mismo” (Leguizamón, 2017, p.99).

Respecto a Piaget se cuestionó sobre el pensamiento como producto del lenguaje, diciendo que “el lenguaje puede construir una condición necesaria de la determinación de las operaciones lógico- matemáticas sin ser, sin embargo, una condición suficiente de su formación” (Piaget, 1978, p.30). Piaget evidenció la existencia de una inteligencia práctica antes de la aparición del lenguaje, introduciendo el concepto de función semiótica, la cual hizo una diferenciación entre significado y significante, abriendo la posibilidad de que un solo significante pueda tener varios significados (Leguizamón, 2017) y la define “como la habilidad de representar algo a través de un signo o un símbolo o cualquier objeto” (Piaget 1970, p.45).

Teoría de los registros de representación semiótica

Se presenta desde las perspectivas de Raymon Duval (1999) y los aportes de Bruno D´ Amore (2005 y 2006), D’ Amore y Fandiño, (2009) y D´Amore, Fandiño y Iori, (2013)

La matemática es un lenguaje universal, que a través de la historia ha establecido sus propios signos y símbolos para poder comunicarse, es decir, existe una conexión entre la matemática y la semiótica. Una primera cercanía aparece cuando ésta es pensada y fundada por axiomas que son expresados simbólicamente bajo la corriente filosófica del formalismo (D´Amore, Fandiño y Iori, 2013). Según Duval (1999) “no es posible estudiar fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación (…) y esto, porque no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación” (p.24). Por tanto, la representación es entendida como “la forma bajo la cual puede describirse una información y tomarse en cuenta en un sistema de trasformación” (Duval, 1999, p.26). En este sentido se inicia hablar de las representaciones simbólicas porque gracias a ellas, la matemática ha podido acceder a “los objetos matemáticos, en el sentido que no son accesibles perceptivamente o instrumentalmente” (D´Amore, Fandiño y Iori, 2013, p.7).

La teoría sobre semiótica en la Educación Matemática comienza en los primeros años de la década de los 80 cuando un psicólogo desconocido en el campo de la matemática Raymond

Duval, inició a publicar investigaciones acerca del uso de los signos, las figuras, y las gráficas en el aprendizaje de la geometría. “Desde 1985 aparece como representación semiótica (…) trabajos sobre la adquisición de conocimiento matemático y sobre los considerables problemas que su aprendizaje suscita” (Duval, 1999, p.26-27). En este momento, los investigadores reconocidos como Raymond Duval (1993), Luis Radford (1997), Bruno D´Amore (1998), Juan D Godino (2002), entre otros colaboradores, han dejado evidencia sobre la importancia de la semiótica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática (D´Amore, Fandiño y Iori, 2013).

Los objetos matemáticos (números, rectas, funciones, figuras geométricas) son diferentes de sus representaciones (escritura: decimal, algebraica, fraccionaria, gráficos, trazos), dicha diferencia es primordial en la Educación Matemática, de acuerdo con Duval (1999) “no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación” (p.13). Sin embargo, se aclara que un mismo objeto matemático se puede ver en diferentes representaciones, por ejemplo, el objeto matemático fracción presenta las siguientes representaciones semióticas: escritura fraccionaria $\frac{1}{4}$, escritura decimal $0{,}25$, escritura exponencial 25×10^{-2}, escritura verbal (un cuarto), escritura conjuntista $\{x \in Q^{+}/4x - 1 = 0\}$.

Por medio de las representaciones se llega a la comprensión de los objetos matemáticos, teniendo en cuenta que las matemáticas, a diferencia de otras ciencias, están construidas con objetos no tangibles como por ejemplo (ecuación, razones, punto, función), dichos objetos no se relacionan con el contexto de la cotidianidad, puesto que no es posible dar una abstracción física real y la única manera de manipularlos es recurriendo a los registros semióticos y sus representaciones; mientras que otras ciencias como la botánica, los objetos son tangibles y se pueden mostrar como los arbustos, frutales, flores, tallos, hojas (D’ Amore y Fandiño, 2009).

Las representaciones semióticas son esenciales, porque pueden describir una información que facilita los procesos de enseñanza y aprendizaje de objetos matemáticos, dicha "adquisición conceptual de un objeto pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas" (Duval, 1988; citado en D´Amore, 2005, p.29). Además, todo sujeto al realizar una actividad matemática se debe movilizar en un contexto de representación y son las representaciones en cada uno de los registros las que contribuyen en la comprensión.

A través de registros de representación es posible llevar a cabo el estudio de algún objeto matemático. Por tanto, un "registro de representación semiótica" se refiere a un sistema de signos que permite cumplir las funciones de comunicación, de tratamiento y de objetivación; Duval, (1999) las define como: "la comunicación hace referencia a las representaciones externas producidas por un sujeto o por un sistema" (p.33). "El tratamiento como una transformación que se efectúa en el interior de un mismo registro de representación y no se moviliza fuera de él" (p.31) y por último la "objetivación, corresponde al descubrimiento por el sujeto mismo de aquello que hasta entonces no sospechaba, incluso si otros se lo hubieran explicado" (p.32). Se aclara que la *transformabilidad* o *trasformación* es conocida como la propiedad fundamental de las representaciones semióticas, existen dos tipos y se evidencia de la siguiente manera:

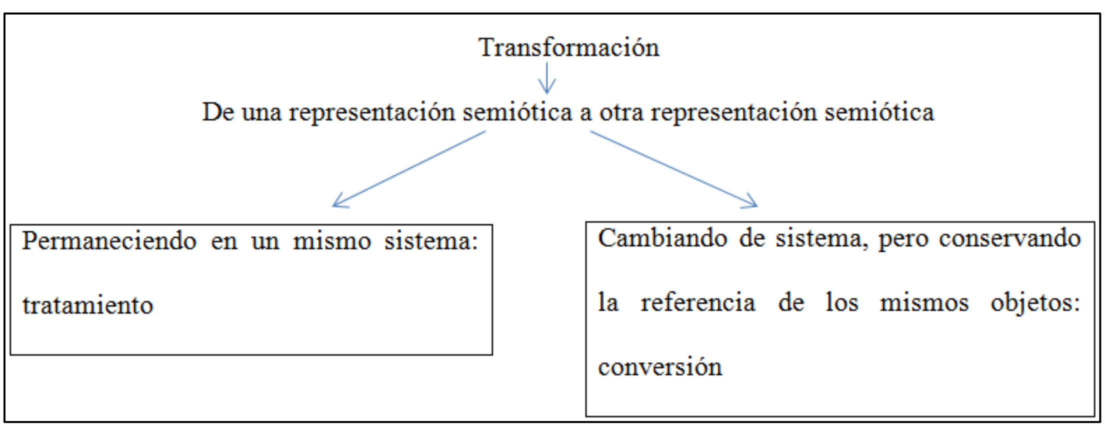


Figura 1. Tipos de transformación semiótica

Fuente: tomado de Azañero (2013)

Actividades cognitivas fundamentales de la representación semiótica

Según Duval (1999, p.40) hay tres actividades cognitivas inherentes a la semiosis, las cuáles son: *formación, tratamiento y conversión,* definidas así:

- *La formación:* es la representación en un registro semiótico particular, ya sea para "expresar" una representación mental, o bien para evocar un objeto real.
- *El tratamiento:* es una transformación que produce otra representación dentro del mismo registro.
- *La conversión:* es una transformación que produce una representación en un registro diferente conservando los objetos.

De acuerdo a las actividades, se resalta lo siguiente: "si se cambia el registro semiótico necesariamente cambia la representación" (D' Amore, 2005, p.30). Se estaría hablando de *conversión*, "mientras no se garantiza lo contrario; es decir, cambiar la representación semiótica manteniéndose en el mismo registro de representación" (D' Amore, 2005, p.30). Esto último, se refiere a *tratamiento*.

Un mismo objeto matemático se puede apreciar desde diferentes registros de representación por tanto, se realiza la descripción del objeto matemático de estudio en los cuatro registros utilizados en la investigación de acuerdo con (García, 2013, p.46-47).

Registro verbal: da una visión descriptiva y generalmente cualitativa del objeto matemático. En la mayoría de las ocasiones se parte de esta representación para interpretar los restantes lenguajes y así obtener un mayor nivel de abstracción.

Para este caso mediante un enunciado, se describen los datos numéricos e información que se relaciona con dos variables.

Registro algebraico: este tipo de registro permite recoger la generalidad a través del símbolo, en términos de ser un representante de cualquier elemento de un determinado conjunto numérico.

Es un par de ecuaciones de primer grado, cada una con dos variables; donde pueden estar expresadas implícitamente, explícitamente o combinadas.

Registro tabular: da una visión cuantitativa, fácilmente interpretable desde la óptica de una correspondencia, es decir, de la identificación de pares de valores.

Es por medio de dos tablas de valores; cada tabla una es un arreglo de dos filas: En la superior se ubican los valores que toma la variable independiente y en la inferior se ubican los valores que se obtienen para la variable dependiente. De esta manera se expresa la relación que existe entre dos variables y las columnas conforman los pares ordenados.

Registro gráfico: la representación en el gráfico cartesiano es un excelente instrumento para expresar la dependencia entre dos variables, además leer, interpretar y construir gráficas cartesianas que permiten establecer la relación existente entre las magnitudes representadas.

Para graficar un sistema de ecuaciones lineales con dos variables (x e y) es mediante la ubicación de pares ordenados (x, y), donde valores de la variable independiente son expresados en el eje horizontal (eje de las abscisas) y los de la variable dependiente en el eje vertical (eje de las ordenadas), las rectas pueden ser: paralelas, secantes o coincidentes.

Respecto a las actividades cognitivas esenciales en la resolución de problemas Duval (2006) afirma:

> Desde un punto de vista matemático, la conversión y el tratamiento son un todo en la resolución de problemas. Es más, lo que importa es el tratamiento que es el que hace relevante la elección del "mejor" cambio de registro (economía de medios, más potencia para la generalización, o más intuitivo...) para resolver el problema dado (p.149).

Resolución de problemas

Para definir lo que se entiende por problema, Leguizamón (2017) menciona a varios autores de la siguiente manera:

> Hoc (1987) citado por Chamorro (2003, p. 276) “un problema es la representación de un sistema cognitivo construido a partir de una tarea, sin disponer inmediatamente de un procedimiento admisible para alcanzar el objetivo”. Otra postura por mencionar es la de Schoenfeld (1985) citado por Santos (2007, p. 48) para el cual “un problema es una tarea difícil para el individuo que está tratando de hacerla”. Como se puede deducir de las posiciones anteriores, un problema es una encrucijada en donde hace falta ingenio para poder salir de ella. Para el caso matemático se pueden aplicar las anteriores definiciones con la particularidad que las situaciones se refieren a entes matemáticos, lo que sí es claro es que solucionar un problema matemático va más allá de aplicar algoritmos y realizar operaciones (p.75-76).

Sin embargo, en este trabajo se está de acuerdo con lo planteado por Polya:

> resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados” (MEN,1998, p. 52).

Para la solución de un problema, en la investigación se tuvo en cuenta la heurística planteada por George Polya (1965 reimp. 2013), de la siguiente manera: comprender el problema, concebir un plan, ejecución del plan y examinar la solución obtenida.

Según Polya (1965) “podemos cambiar el vocabulario y hacer la misma pregunta de diferentes formas” (p.25). De acuerdo a lo anterior, se describen las estrategias y la serie de preguntas adaptadas como ayuda al estudiante para orientar la resolución.

- **Comprender el problema**: se refiere que el estudiante pueda responder una serie de preguntas como ¿Qué le pide el problema?, ¿Cuáles son los datos?, ¿Hay información que le brinda el problema que no se requiere para la solución del mismo?

- **Concebir un plan**: se destaca, cómo o qué estrategia va a usar el estudiante para resolver el problema. Las estrategias pueden partir desde aplicar pruebas de ensayo y error, hasta plantear toda una táctica que le permita intentar llegar a la solución del mismo.
- **Ejecución del plan**: es poner en práctica en plan trazado. Generalmente se usan procesos matemáticos que permiten darle solución al problema.
- **Examinar la solución obtenida**: es ver si el proceso desarrollado permitió resolver el problema. En este último paso el estudiante está en la capacidad responder ¿Su respuesta cumple con lo pedido en el problema?, ¿la solución tiene sentido?, ¿considera que existe alguna otra solución? ¿Cuál sería?

Marco conceptual

Esta investigación trabajó sobre el concepto sistema de ecuaciones lineales 2×2, inmerso en la resolución de problemas: Este tema es abordado teniendo en cuenta la Propuesta del Programa Curricular del grado noveno asesorada por Carlos Eduardo Vasco Uribe (MEN, 1989-1990). Al igual que en el plan de estudios de la IERRSRVB, donde los estudiantes tienen un primer acercamiento al objeto matemático de estudio.

Para la contextualización se presenta un sistema de ecuaciones lineales y los métodos de solución que históricamente se han utilizado, (eliminación, sustitución, igualación, gráfico y regla de cramer). El siguiente ejemplo es un tipo de ecuaciones que se va estudiar:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Se trata de un sistema de ecuaciones lineales 2×2 , es decir, es un conjunto formado por dos ecuaciones, con dos variables. De manera general se definen así:

$$\begin{cases} ax + by = c \quad ecuación\ 1 \\ dx + ey = f \quad ecuación\ 2 \end{cases}$$

Donde $a, b, d\ y\ e$ son números reales diferentes de cero llamados coeficientes de las variables, $c\ y\ f$ son números reales llamados términos independientes.

La solución de un sistema, es encontrar valores a las variables que conforman el sistema de ecuaciones y desde luego que satisfagan al sistema. Según (González y López, 2008-2009, p.38), un sistema se puede ver desde dos perspectivas así:

Desde el punto de vista geométrico, cada una de las ecuaciones representa una recta en el plano. Resolver el sistema consiste en hallar (si los hay) los puntos de corte de las dos rectas. Esa es la razón de que estos sistemas se llamen lineales.

Desde el punto de vista algebraico, el problema consiste simplemente en hallar dos números *x* e *y*, que satisfagan las dos igualdades. Las ecuaciones son lineales porque cada término (excepto los términos independientes) tiene grado 1.

Los sistemas se clasifican teniendo en cuenta el número de soluciones como:

- Incompatibles: no admite solución. En este caso al graficar, las rectas no tienen punto en común.
- Compatibles: existen dos casos: primero si admite una solución se dice que es compatible determinado y gráficamente las rectas se cortan en un solo punto. Segundo compatible indeterminado, si tiene infinitas soluciones, y la gráfica son las rectas coinciden en todos sus puntos.

A continuación se mostrará el método gráfico y los métodos algebraicos para solucionar un sistema de ecuaciones lineales 2×2.

Método gráfico

Permite visualizar geométricamente la clasificación descrita anteriormente.

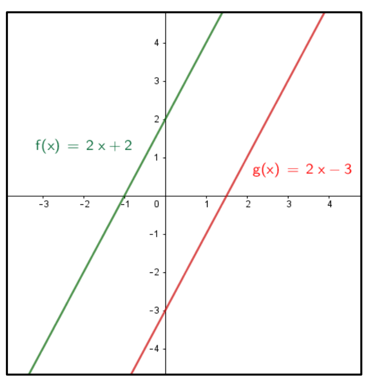


Imagen 1. Rectas paralelas - Ninguna solución

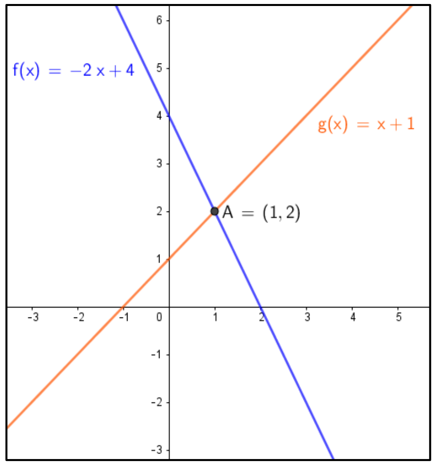


Imagen 2. Rectas secantes - solución única

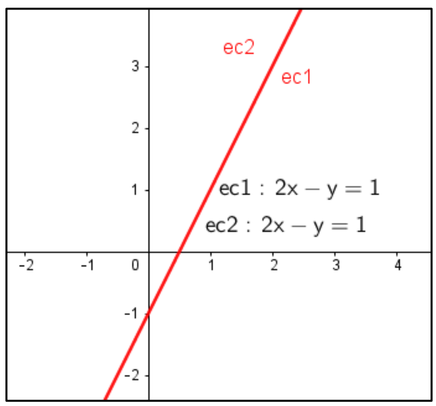


Imagen 3. Rectas coincidentes - Infinitas soluciones

Respecto al punto de vista algebraico se pueden utilizar varios métodos como: sustitución, igualación, reducción y regla de Cramer; para solucionar un sistema de ecuaciones lineales 2×2. A continuación se presenta de manera general los pasos a seguir para hallar los valores (x e y) que satisfacen al sistema.

Método de sustitución:

Primer paso **despejar una variable**: se escoge una ecuación y se despeja unas de las variables.

Segundo paso **sustituir:** se sustituye la expresión determinada en el primer paso en la otra ecuación para obtener una ecuación con una variable, luego se resuelve para hallar el valor de esa variable.

Tercer paso **sustituir en la ecuación de la variable despejada**: se sustituye el valor encontrado en el segundo paso en la expresión despejada en el primer paso para determinar la variable faltante.

Cuarto paso **verificar las soluciones:** se reemplaza los valores encontrados en cada una de las ecuaciones con la finalidad que satisfagan al sistema.

Método de reducción o eliminación

Busca combinar las dos ecuaciones usando sumas o diferencias para eliminar una de las variables y reducir el sistema a una ecuación con una incógnita.

Primer paso **ajustar los coeficientes**: se multiplica los términos de una o ambas ecuaciones por cantidades adecuadas de tal manera que el coeficiente de una variable de una ecuación se diferencie únicamente en el signo de su coeficiente en la otra ecuación.

Segundo paso **sumar las ecuaciones**: se suman las dos ecuaciones trasformadas para eliminar una variable, luego se despeja la otra variable para determinar el valor.

Tercer paso **sustituir**: se sustituye el valor determinado en el segundo paso en una de las ecuaciones originales, y se resuelve para determinar el valor de la variable restante.

Cuarto paso **verificar las soluciones:** se reemplaza los valores encontrados en cada una de las ecuaciones con la finalidad que satisfagan al sistema.

Posibles casos cuando se utiliza este método.

Caso 1: si al sumar las dos ecuaciones para eliminar una variable, se eliminan las dos variables, es decir, aparece la ecuación $0 = k$, donde la constante $k \neq 0$, el sistema no admite solución concluyéndose que el sistema es incompatible.

Caso 2: si al sumar las dos ecuaciones para eliminar una variable, se eliminan las dos variables, y resulta la expresión $0 = 0$, el sistema admite más de una solución, esto es compatible indeterminado.

Caso 3: si al sumar las dos ecuaciones para eliminar una variable, se eliminan una de las dos variables, y resulta la expresión $x = k$, donde $k \in R$ y x es la variable, el sistema admite una solución, esto es compatible determinado.

Método de igualación

Primer paso **despejar:** se despeja la misma variable en las dos ecuaciones dadas.

Segundo paso **igualar:** se igualan las expresiones obtenidas en el primer paso y se despeja la variable resultante.

Tercer paso **determinar:** se determina el valor de la otra variable faltante reemplazando el valor de la variable encontrada en el segundo paso en alguna de las ecuaciones despejadas en el primer paso.

Cuarto paso **verificar las soluciones:** se reemplaza los valores encontrados en cada una de las ecuaciones con la finalidad que satisfagan al sistema.

Método regla de Cramer

Se forma inicialmente los determinantes para el sistema y para cada variable. Un determinante es un número asociado a un arreglo de dos números reales en igual cantidad de filas y columnas.

La notación $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$ corresponde a un determinante 2×2 o de orden 2, asociado a un arreglo de dos filas con dos columnas. En el determinante, los coeficientes a y e forman la diagonal principal y los coeficientes b y d es la diagonal secundaría. El valor del determinante es la diferencia del producto de los coeficientes de la diagonal principal con el producto de los coeficientes de la diagonal secundaria, así:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = a \cdot e - b \cdot d$$

Para solucionar un sistema de ecuaciones 2×2 utilizando determinantes se aplica la regla de la siguiente manera.

A partir del sistema inicial

$$\begin{cases} ax + by = c & ecuación\ 1 \\ dx + ey = f & ecuación\ 2 \end{cases}$$

Se plantea tres determinantes de la siguiente manera:

El primero es el determinante del sistema (D_s) conformado por los coeficientes de las variables *"x"* e *"y"* de la primera ecuación en la primera fila, y la segunda fila por los coeficientes de *"x"* e *"y"* de la segunda ecuación. Esto es:

$$D_s = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = a \cdot e - b \cdot d$$

Un segundo determinante (D_x) para la variable *"x"*, donde la primera columna del determinante son los términos independientes y la segunda columna son los coeficientes de la variable *"y"* de cada ecuación. Esto es:

$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = c \cdot e - b \cdot f$$

Para formar un tercer determinante (D_y) para la variable *"y"* es la primera columna del determinante son los coeficientes de la variable "*x*" y la segunda columna son los términos independientes de cada ecuación. Esto es:

$$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = a \cdot f - c \cdot d$$

Se aplica regla de Cramer para encontrar solución al sistema de la siguiente manera. Para hallar el valor de variable *“x”* es el cociente entre el determinante D_x y el determinante D_s así

$$x = \frac{D_x}{D_s} \ Donde\ D_s \neq 0$$

De igual manera para hallar el valor de variable *“y”* es el cociente entre el determinante D_y y el determinante D_s así.

$$y = \frac{D_y}{D_s} Donde\ D_s \neq 0$$

Metodología

Esta investigación se realizó bajo el enfoque de investigación mixta, con predominio cualitativo, siguiendo las fases metodológicas de la Ingeniería Didáctica. Según Artigue (1995), la ingeniería surgió en los años ochenta en la didáctica de la matemática, como metodología de investigación se caracteriza por tener un esquema experimental basándose en las realizaciones didácticas de clase, regida por cuatro fases: la primera es de análisis preliminar, la segunda de concepción y análisis a priori, la tercera es de experimentación y finalmente análisis a posteriori y evaluación.

Se diferencian investigaciones en dos niveles: la macro-ingeniería y la micro- ingeniería, respecto a esta última, Artigue (1995) manifiesta:

> Son más fáciles de llevar a la práctica. Sin embargo, si bien ellas permiten tener en cuenta de manera local la complejidad de los fenómenos de clase, no la dejan unir con la complejidad esencial de los fenómenos asociados con la duración de las relaciones entre enseñanza y aprendizaje (p. 36-37).

Por lo anterior, el nivel de este trabajo es de micro- ingeniería, por tratarse de una temática específica, implementada en el aula, teniendo en cuenta un cronograma de aplicación de las actividades.

Fases de la ingeniería didáctica

Primera fase: análisis preliminares

Es la forma como el investigador se aproxima e indaga al objeto de estudio, Para Artigue (1995) el análisis en esta fase se realiza bajo tres dimensiones: epistemológica, cognitiva y didáctica, de igual manera un análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva.

La **dimensión epistemológica** es asociada a las características del saber en juego. Dicho de otra manera, es realizar una reseña histórica y aspectos teóricos del objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales.

En la **dimensión cognitiva** se estudia las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza, para tal caso, se aplica un cuestionario diagnóstico.

La **dimensión didáctica** se refiere a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza, para tal fin, se hace un análisis de un texto del libro guía que se utiliza en la Institución, para conocer cómo se aborda actualmente la enseñanza del objeto matemático de estudio.

El análisis del campo de restricciones se encuentra relacionado con el contexto de la investigación y descripción de la población con la que se experimentó cada actividad diseñada.

Segunda fase: concepción y el análisis a priori

El investigador “toma la decisión de trabajar con un determinado número de variables del sistema no fijadas por las restricciones llamadas variables de comando” (Artigue, 1995, p.42). Existen dos tipos de variables.

“Las variables macro-didácticas o globales, concernientes a la organización global de la ingeniería. Y las variables micro-didácticas o locales, concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o fase” (p.42).

Esta fase tiene como un primer objetivo, diseñar actividades.

Un segundo objetivo se describe el análisis a priori de cada una de las actividades, donde se establece las posibles dificultades y soluciones de cada actividad.

Tercera fase: experimentación

Es la aplicación de las actividades, y allí se explica la forma de trabajo, las funciones a cumplir por parte del profesor y el rol de los estudiantes. Se realiza observación de los fenómenos que ocurren en el aula y se recolectan producciones escritas por el estudiante.

Cuarta fase: análisis a posteriori y validación

De acuerdo a Artigue (1995), el análisis a posteriori "se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación" (p.48); es decir, las producciones escritas por los estudiantes en cada una de las actividades. En la validación es la confrontación de los análisis a priori y a posteriori de cada actividad, es decir, la comparación de los comportamientos esperados, con los que realmente sucedieron en la experimentación.

Análisis y discusión de resultados

Se presenta la descripción acorde con el orden de cada uno de las fases mencionadas anteriormente.

Primera fase: análisis preliminares

Se realizó el análisis de acuerdo a las dimensiones mencionadas en la metodología de investigación.

Dimensión epistemológica del objeto matemático de estudio

Conocer acerca del objeto de estudio, implica averiguar acerca de las formas de comunicación de los algoritmos utilizados para resolver ecuaciones desde la antigüedad y el proceso que condujo al simbolismo para la construcción del algebra.

Una de las principales dificultades es la transición entre los lenguajes del natural al simbólico que se originó aproximadamente 2.000 a. C con las culturas Babilónicas y Egipcias hasta Viéte 1500 d.C en Europa; (García, 2014). Sin embargo el álgebra se consolidó con la necesidad de resolver situaciones cotidianas que inicialmente eran expresadas en lenguaje natural al igual que su solución. En el trascurrir del tiempo nace el lenguaje sincopado con el matemático griego Diofanto (siglo III d. C), este lenguaje es la combinación del natural con el simbólico con la finalidad de encontrar soluciones a partir de la generalización, el cual hace uso de abreviaturas para la representación de incógnitas en la solución de las ecuaciones.

En la civilización Egipcia se tienen papiros donde se registra el desarrollo matemático, el más reconocido es el de Rinh (1650 a. C), allí se encuentra que el escriba Ahmes resolvió una serie de problemas cotidianos, alrededor de 87, tenían relación con la agrimensura planteando ecuaciones en lenguaje natural de la época, otro es el de Moscú (1850, a. C) (García, 2014).

En los árabes hubo estancamiento en cuanto al desarrollo del simbolismo, pero un notable avance respecto a la construcción de procedimientos, según la investigación realizada por Malesani (1996) que afirma:

> El siglo XII, Leonardo Pisano introdujo en Occidente los procedimientos aritméticos utilizados por los árabes y como consecuencia, las características del álgebra árabe se transmitieron a Europa y tuvieron una fuerte influencia durante más de tres siglos. Acerca de la construcción simbólica, menciona que en las obras de Leonardo y sobre todo en el tratado de ábaco llamado *Trattato d'Algibra* (Anónimo del Siglo XIV) se puede observar que los desarrollos algebraicos utilizaban fundamentalmente el lenguaje natural (citado en García, 2014, p 16).

Es François Viète (1540-1603), quien introdujo la notación simbólica utilizando las letras para designar, la incógnita, sus potencias, los coeficientes genéricos y los signos para las operaciones, marcando una nueva etapa junto con la contribución de Descartes (1596-1650) para consolidar una notación que es más o menos la que empleamos hoy, convirtiéndose el álgebra en la ciencia de los cálculos simbólicos y de las ecuaciones. Este lenguaje simbólico se utilizaba en los procedimientos resolutivos como en la demostración de reglas generales, de esta manera se da inicio al desarrollo de los cambios conceptuales necesarios en la transición del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico (García, 2014). Se aclara que Diofanto fue el que utilizó por primera vez en la historia un símbolo, para representar una incógnita en una ecuación.

En la evolución del lenguaje simbólico la humanidad tardó un periodo de tiempo extenso para consolidar lo que conocemos hoy en día; por ejemplo para llegar al actual proceso de solución de una ecuación lineal $ax + b = c$, trascurrió más de 3.000 años. Se destacan tres fases diferentes en la transición del lenguaje natural al lenguaje algebraico. La primera es la retórica o primitiva; donde todo se escribía en palabras, sin recurrir a ningún símbolo. La segunda es la sincopada; se origina desde Diofanto en el siglo III hasta finales del siglo XVI; en este periodo introdujeron algunas abreviaturas para representar la incógnita y las relaciones de uso frecuente, sin embargo los cálculos se seguían desarrollando en el lenguaje natural. La última es la simbólica, corresponde a la moderna simbolización, donde se utilizan representaciones: letras para cantidades y signos para operaciones, con la finalidad de resolver ecuaciones y demostrar reglas generales.

A continuación se hace un análisis de los métodos de aproximación que permitía resolver lo que hoy se conoce como ecuaciones. El primero se llamó método de la falsa posición empleado en la fase retórica en los egipcios, el procedimiento se encuentra en el papiro de Rinh, mencionado así:

> Aparecen problemas de ecuaciones del tipo $x + \frac{1}{n}x = b$ con n y b enteros positivos, además, $x \in E$, siendo E el conjunto numérico que usaban los egipcios, compuesto por los números naturales no nulos, (…) las fracciones $\frac{1}{n}$ con n entero positivo. Para resolverlo asumían un valor para la incógnita (de ahí su nombre de falsa posición o reguli falsi) con el que determinaban el valor del miembro izquierdo de la ecuación, para luego plantear una proporción directa con los "resultados" errados o falsos que obtenían, lo que les permitía encontrar el "montón", designación que le daban a la incógnita (García, 2014, p. 19).

"Este procedimiento tuvo una larga aplicabilidad hasta que la notación algebraica y sus métodos asociados basados en lo simbólico fueron abriéndose paso al occidente desde los siglos XVI y XVII sobre todo del mundo mesopotámico" (Masa, 2009, p.85).

Se presenta un ejemplo de problema y solución encontrado en Masa (2009) y su generalización del método de la falsa posición en el álgebra moderna.

En lenguaje natural dice: tengo una piedra, no su peso. Un séptimo es añadido. Lo peso, una mina ¿Cuál es el peso original? Respuesta 52 $1/2$ gin.

Traducido al lenguaje simbólico del algebra moderna corresponde a la ecuación que se plantearía así:

$$x + \frac{1}{7}\,x = 60$$

En vez de aplicar factor común y compensación en ambos miembros de la igualdad, es decir, faltos de todo procedimiento simbólico, adoptaron de la falsa posición, dándole valores a x de manera que el resultado se acerque al deseado.

$$Para\;x = 7 \qquad 8$$

$$Para\;x = 14 \qquad 16$$

$$Para\;x = 21 \qquad 24$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots. \qquad \dots..$$

Y asi sucesivamente evidenciando que hay una relación de proporcionalidad directa, entre el valor hipotético propuesto y el resultado obtenido. Esto quiere decir que se aplicó proporcionalidad directa:

$$\frac{7}{x} = \frac{8}{60}$$

Obteniéndose el valor buscado:

$$x = \frac{7 \cdot 60}{8} = 52\frac{1}{2}\;gin$$

De manera general, este método es aplicable a toda ecuación de primer grado de la forma:

$$a\quad x = b \qquad a, b\;conocidos$$ Igualdad 1

De modo que se considera un valor hipotético de la x cumpliendo:

$$a\quad x' = b'$$ Igualdad 2

Dividiendo la igualdad 1 y 2:

$$\frac{x'}{x} = \frac{b'}{b}$$

El siguiente método de la doble falsa posición consideraba dos valores para la incógnita, de ahí su nombre. Era utilizado para la resolución ecuaciones de primer grado con la incógnita en ambos lados de la ecuación, ecuaciones segundo grado y sistemas de ecuaciones. Sin embargo los calculistas chinos utilizan métodos complejos en el Jiuzhang, especialmente en el séptimo de sus capítulos titulado: exceso y déficit (Maza, 2009) de igual manera los hindúes resolvían situaciones problema que se pueden modelar actualmente con ecuaciones lineales.

De acuerdo con Maza (2009, p.87) el problema más sencillo resuelto con este método (doble falsa posición) y dado en leguaje natural es:

Sea un número (de personas) comprando mercancías. Si cada persona paga 8 existe un exceso (ying) de 3, si cada persona paga 7 existe un déficit (bu zu) de 4. Encontrar el número de personas y el coste de las mercancías.

Para la traducción al lenguaje simbólico se tiene que el número de personas es *a, x* el coste de cada unidad de mercancía y b el coste total, la ecuación

$$a \quad x = b$$

No tiene ningún valor conocido. Lo que sí nos afirma el problema es que si $x = 8$ sobran 3 monedas:

$$8 \quad a = b + 3$$

Y si $x = 7$ hay un déficit de 4 monedas.

$$7 \quad a = b - 4$$

Si se resta ambas ecuaciones:

$$(8 - 7)a = 3 - (-4)$$

$$a = \frac{3+4}{8-7} = 7\,personas$$

A partir que $a = 7$ es posible calcular es cote total b de las mercancías sin más que sustituir en cualquiera de las ecuaciones anteriores:

$$8\, *7 = b + 3$$

$$b = 53\,modenas$$

De manera general en Maza (2009. p.88) se presenta un procedimiento alternativo de mayor complejidad pero igual de efectivo.

Se parte de la ecuación general original $a\ \ x = b$

Con un valor hipotético de *x’* se obtiene un exceso de *d’*.

$$a\,x' = b + d'$$

Como otro valor hipotético de *x’’* se obtiene un déficit de *d’’*.

$$a\,x'' = b - d''$$

Restando como antes se ha hecho ambas ecuaciones se obtiene el valor de *a*:

$$a(x' - x'') = d' + d''$$

$$a = \frac{d' + d''}{x' - x''}$$

Ahora bien, es posible obtener el valor de b a partir de las ecuaciones y no sustituyendo en cualquiera de ellas. Si la primera ecuación se multiplica por *x*.

$$a\,x'\ \ x'' = b\,x'' + d'x''$$

Y si la segunda se multiplica por x’:

$$a\,x'\ \ x'' = b\,x' - d'x'$$

Restando ambas.

$$0 = b(x'' - x') + (d'x'' + d''x')$$

$$b = \frac{d'x'' + d''x'}{x' - x''}$$

De los sistemas de ecuaciones lineales 2 x 2 en Grecia Meavilla (2008, p.320-321) presenta un ejemplo de problema de Joan Ventallol presentando un problema con una regla aritmética como resolución de un sistema asi:

> Dos mercaderes quieren comprar dos naves de las cuales una cuesta 500 ducados y la otra 550. Dice uno al otro: si me prestas un tercio de tus dineros, con lo que yo tengo podré comprar la nave de 500 duc. Responde el otro: si me prestas la cuarta parte de tus dineros, con lo que yo tengo podré comprar la nave que cuesta 550 duc. Pregunto: ¿Cuánto dinero tenia cada uno? (p.320)

Se utilizó la siguiente regla para solucionarlo

Por el que pide $1/_3$ para comprar la nave que cuesta 500, multiplica por 3 y serán 1500. Quita el precio de la otra nave, que es 550, y quedan 950, Multiplica por 4 y serán 3800.Ahora multiplica 3 veces 4, hacen 12, quita 1 y quedaron 11, que es partidor.

Divide 3800 por 11 y vendrán 345 $\frac{5}{11}$, y tanto tenía el que pidió la tercera parte del otro para poder compra la nave de 500 duc.

Y para el otro, multiplica 550 por 4, y serán 2200.Quita el precio de la otra nave, que es 500 y quedan 1700. Multiplica por 3, serán 5100.

Divídelos por 11 y vendrán 463 $\frac{7}{11}$, y por tanto dinero tenía el que pidió prestado al otro la cuarta parte de su dinero para poder comprar la nave de 550 ducados.

Utilizando la algebra moderna, el sistema de ecuaciones es:

$$x + \frac{y}{3} = 500$$

$$\frac{x}{4} + y = 500$$

Pero los babilónicos fueron quienes ya resolvieron sistemas de ecuaciones lineales, no utilizaban letras para representar cantidades, pero llamaban incógnita a longitud, anchura, área, o volumen sin tener relación con problemas de medida. Por ejemplo planteaban un sistema en los siguientes términos:

$$\frac{1}{4}\ anchura + longitud = 7\ manos$$

$$longitud + anchura = 10\ manos$$

Para resolver este tipo de situaciones se asignaba el valor 5 a *una mano* y la solución es $anchura = 20$ y $longitud = 30$, satisfaciendo al sistema; este método es equivalente al método actual de eliminación de la siguiente manera; sea $x\ e\ y$ las variables, donde $x = longitud$, $y = anchura$ y $manos = 5$, luego, se plantea del sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{4}y + x = 7(5) & Ecuación\ 1 \\ x + y = 10(5) & Ecuacion\ 2 \end{cases}$$

Se simplifica en sistema y se tiene:

$$\begin{cases} y + 4x = 140 & Ecuación\ 1 \\ y + x = 50 & Ecuación\ 2 \end{cases}$$

Se multiplica por (-1) a la ecuación 1

$$\begin{cases} -y - 4x = -140 & Ecuación\ 1 \\ y + x = 50 & Ecuación\ 2 \end{cases}$$

Luego, se suman las ecuaciones y se simplifica la variable "y" y se despeja la variable x, obteniéndose el valor de $x = 30$, por tanto, $y = 20$.

Se concluye que los Babilónicos conocían este método por medio de una combinación lineal.

Dimensión cognitiva: análisis cuestionario diagnóstico

Se diseñó y se aplicó un cuestionario diagnóstico a los 15 estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Rafael Reyes, de Santa Rosa de Viterbo Boyacá, con el objetivo de analizar y determinar el paso de registros que manejan los estudiantes en torno al objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales 2×2.al igual que el tratamiento.

El diagnostico estuvo conformado por:

Conversión del registro verbal al registro algebraico.

Conversión del registro algebraico al registro gráfico y viceversa.

Conversión del registro tabular al registro gráfico.

Conversión del registro algebraico al registro tabular y viceversa.

Tratamientos de ecuaciones en el registro algebraico.

Identificar los valores (*x* e *y*) que satisfacen un sistema de ecuaciones.

En el análisis se presenta el propósito y lo que se solicitaba en cada punto, luego el porcentaje de estudiantes que realizaron la *conversión* entre registros, teniendo en cuenta como categorías, *conversión* correcta, incorrecta o no realiza, al igual que el *tratamiento* en el registro algebraico, y reconocimiento de los valores (*x* e *y*) de la solución a un sistema. Finalmente la descripción y registro fotográfico de las respuestas encontradas.

El primer punto tenía como propósito hacer *conversión* del registro algebraico al gráfico.

Graficar el siguiente sistema.

$$\begin{cases} y = 2x + 3 & ecuación\ 1 \\ 2\ (y + 4x) = 1 & ecuación\ 2 \end{cases}$$

La primera actividad cognitiva mostrada por los estudiantes fue la *conversión* del registro algebraico al tabular, donde 13 participantes la hicieron de manera correcta. Además, los estudiantes $(E_2\,, E_4\,, E_5, E_8, E_9, E_{10}, E_{11}, E_{13})$ tabularon tres puntos, indicando que se puede graficar una ecuación lineal con dos puntos en el plano cartesiano como se muestra en la siguiente imagen.

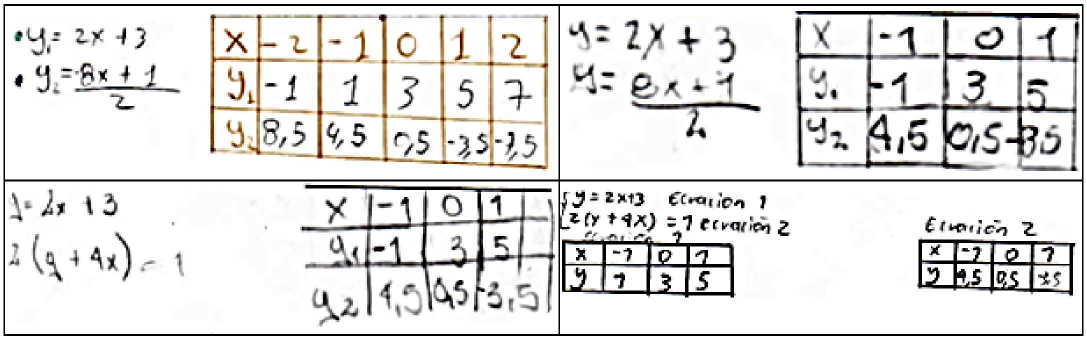


Imagen 4. Evidencia de conversión correcta del registro algebraico al tabular. Cuestionario diagnóstico.

Por otro lado, dos de los 15 estudiantes realizaron la *conversión* de manera incorrecta y fueron los (E_7, E_{15}). Uno de los factores que ocasiono dificultad en el cambio de registro fue la no realización de *tratamiento* en la ecuación 2, en el sentido de no expresar dicha ecuación explícitamente, es decir: despejar la variable *"y"* en función de la variable *"x"* como la ecuación 1 del sistema, como se muestra en la evidencia.

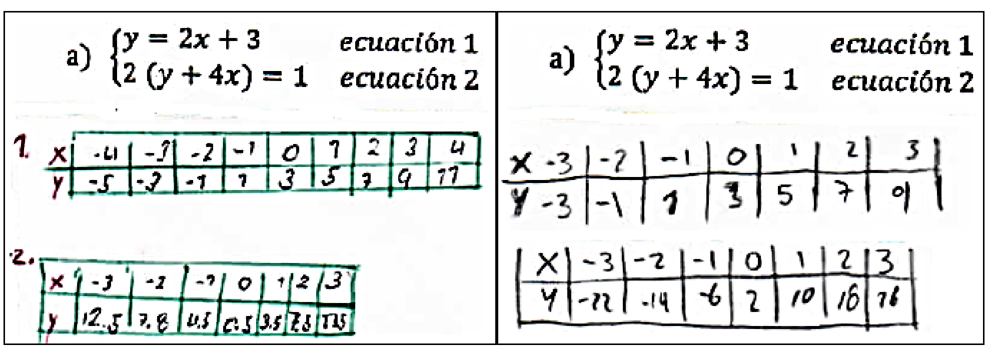


Imagen 5. Evidencia de conversión incorrecta del registro algebraico al tabular. Cuestionario diagnóstico.

Se destaca que algunos estudiantes plantearon representaciones en el registro tabular como una forma auxiliar de pasar al registro gráfico.

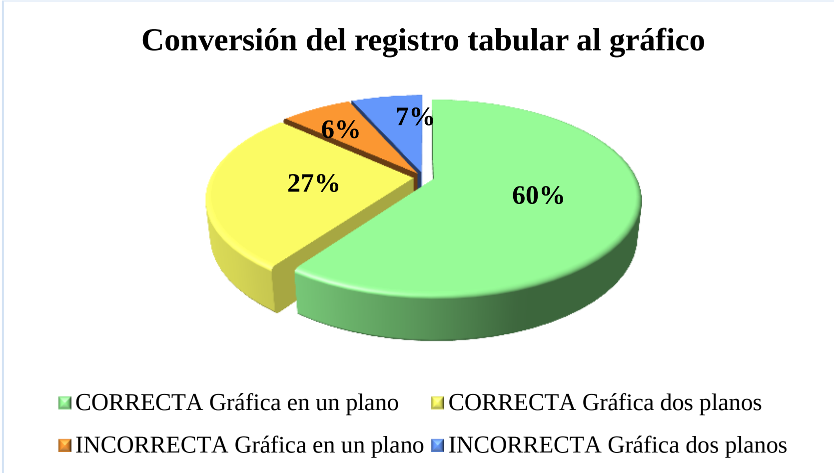


Figura 2. Conversión de registro tabular a gráfico del cuestionario diagnóstico.

Fuente: elaboración propia.

Como lo muestra la *figura 2* un porcentaje significativo de los estudiantes graficaron correctamente el sistema de ecuaciones en un solo plano cartesiano, tal es el caso de los estudiantes (E_3, E_4) evidenciado en *imagen 6.*

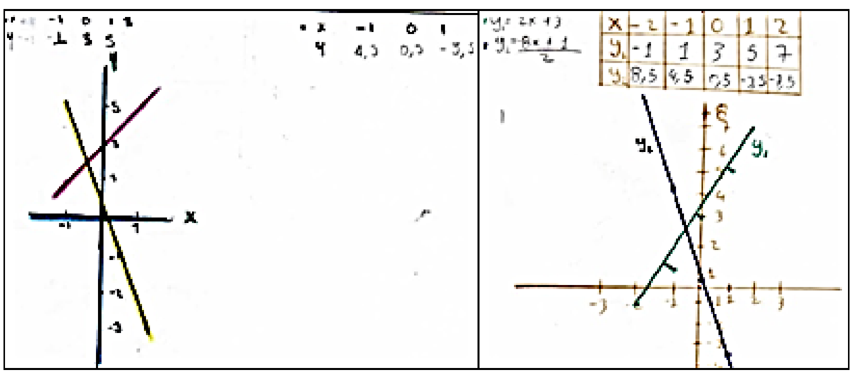


Imagen 6. Evidencia de conversión entre registro tabular y gráfico. Gráficas en un solo plano. Cuestionario diagnóstico.

La *Figura 2* indica que el 27% graficaron correctamente las ecuaciones, pero en diferentes planos, esto muestra que no reconocen el objeto matemático de estudio en el registro gráfico, como se muestra en la siguiente imagen.

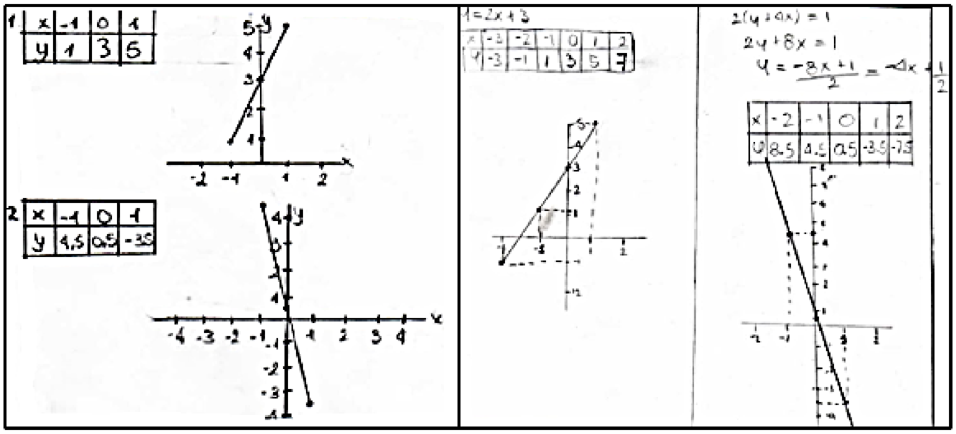


Imagen 7. Evidencia de conversión del registro tabular al gráfico. Gráficas en diferente plano. Cuestionario diagnóstico.

En la *figura 2* muestra que el 6% de los estudiantes hicieron la *conversión* de manera incorrecta, graficando en un solo plano, por ejemplo, el estudiante (E_7) no realiza la *conversión* correctamente del registro algebraico al tabular debido a que algunos de los valores asociados a la variable *"y"* no son correspondientes con la variable *"x"* el cual indica que las coordenadas en el plano cartesiano no forman la recta, por ende se presentó un falló en la *conversión* del registro tabular al gráfico, pero identificaron que se estaba trabajando con un sistema de ecuaciones lineales al momento de graficar el sistema en el plano cartesiano como se muestra en seguida.

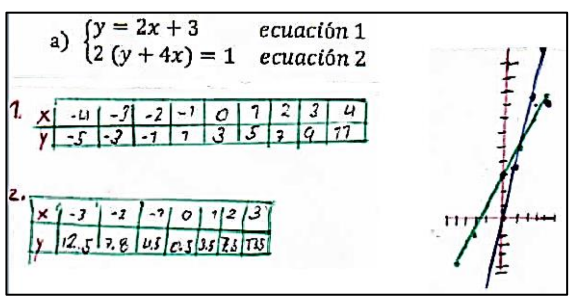


Imagen 8. Evidencia de conversión incorrecta del registro tabular al gráfico. Cuestionario diagnóstico.

Siguiendo con la *figura 2,* el 7% tuvo dificultad en la *conversión* del registro tabular al gráfico, llevando a desconocer por completo un sistema de ecuaciones lineales 2×2. Es decir, gráfica en planos separados las ecuaciones del sistema. Se evidenció que ningún estudiante realizó la *conversión* del registro algebraico al gráfico sin pasar por el registro tabular.

Respecto a la representación gráfica de línea recta, reconocen que ésta se puede obtener a partir de la unión de dos puntos. Se observó que en el registro tabular nombran las variables convencionales *"x"* y *"y"* siendo "x" en el eje horizontal y *"y"* en el eje vertical en el plano cartesiano, facilitando la ubicación de las coordenadas al momento de la *conversión*.

El segundo punto tenía como propósito hacer la *conversión* del registro verbal al registro algebraico.

Plantear un sistema de ecuaciones lineales 2×2 para el siguiente enunciado.

Para ingresar a un parque de diversiones. La familia López paga $33.000 por tres entradas de adulto y dos de niños. Mientras que la familia Vega por cinco entradas de adulto y cuatro de niño paga $57.000.

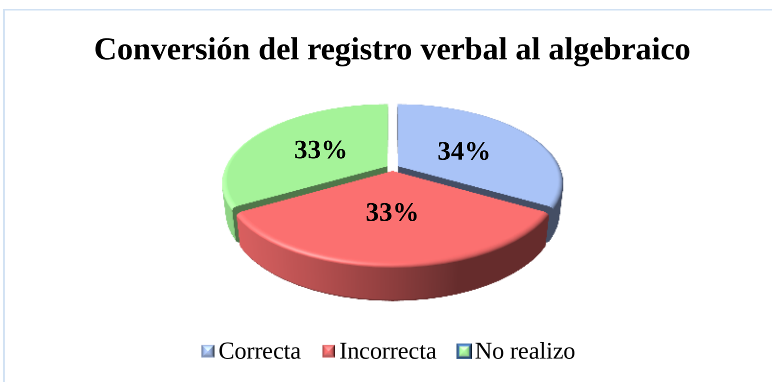
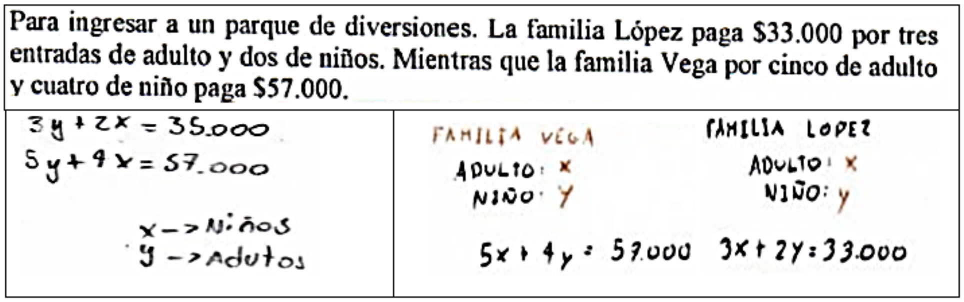


*Figura 3.*Conversión del registro verbal al algebraico. Cuestionario diagnóstico.

Fuente: elaboración propia

La *figura 3* muestra el 34% de estudiantes que realizaron la *conversión* del registro verbal al algebraico correctamente; por ejemplo (E_1, E_4) para realizar la *conversión* etiquetaron las variables con las letras *"x"* y *"y* de acuerdo con los datos del enunciado e hicieron el planteamiento del sistema de ecuaciones como se muestra en la *imagen 9*.

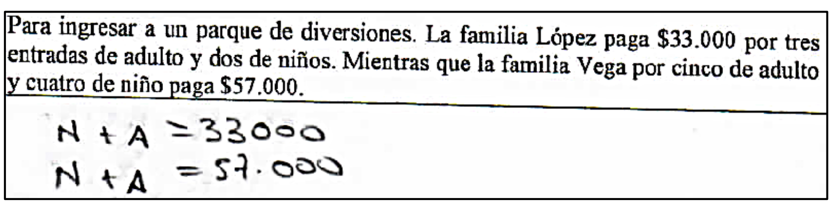


Para ingresar a un parque de diversiones. La familia López paga $33.000 por tres entradas de adulto y dos de niños. Mientras que la familia Vega por cinco de adulto y cuatro de niño paga $57.000.

3y + 2x = 35.000 5y + 4x = 57.000 x → Niños y → Adutos	FAMILIA VEGA ADULTO: x NIÑO: y 5x + 4y = 57.000 FAMILIA LOPEZ ADULTO: x NIÑO: y 3x + 2y = 33.000

Imagen 9. Evidencia de conversión correcta del registro verbal al algebraico. Cuestionario diagnóstico.

La *figura 3* muestra que un porcentaje significativo de los estudiantes de grado décimo de la I.E Rafael Reyes presentaron dificultad para realizar la *conversión* del registro verbal al algebraico. Por ejemplo, el (E_5) reconoció que de acuerdo al enunciado se debe plantear un sistema de ecuaciones lineales. Identificó las incógnitas con las letras *"N"* para referirse a número de niños y *"A"* para el numero de adultos, pero al momento de plantear el sistema no relacionó los datos del enunciado, es decir, la cantidad con la variable representada como se muestra en la *imagen 10*.



Para ingresar a un parque de diversiones. La familia López paga $33.000 por tres entradas de adulto y dos de niños. Mientras que la familia Vega por cinco de adulto y cuatro de niño paga $57.000.

N + A = 33000
N + A = 57.000

Imagen 10. Evidencia de conversión incorrecta del registro verbal al algebraico. Cuestionario diagnóstico.

El tercer punto tenía como propósito hacer la *conversión* del registro algebraico al tabular, con la intención de conocer el *tratamiento* que se le hace a cada una de las ecuaciones del sistema, en el sentido de determinar los despejes dejando expresadas una variable en función de la otra.

Complete la tabla de valores para cada ecuación; donde los valores de *"x"* o *"y"* pertenecen al intervalo $[-3,\ 3]$

- $\begin{cases} -2x + y = 5 & ecuación\ 1 \\ 3x = y + 2 & ecuación\ 2 \end{cases}$

TABLA 1: Ecuación 1

TABLA 2: Ecuación 2

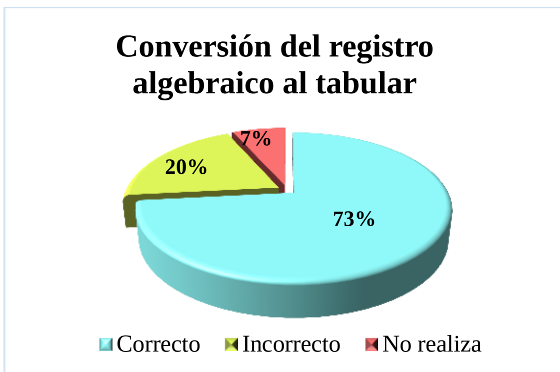


Figura 4. Conversión del registro algebraico al tabular. Cuestionario diagnóstico.

Fuente: elaboración propia

Figura 5. Tratamiento en el registro algebraico. Cuestionario diagnóstico.

Fuente: elaboración propia.

Tanto en la *figura 4 y 5* se muestra un porcentaje significativo de los estudiantes que realizaron correctamente la *conversión* del registro algebraico al tabular *y tratamiento* en el registro algebraico. Para el *tratamiento* tomaron las variables: independiente *"x"* dependiente *"y",* dejando expresado el sistema explícitamente, con el fin de reemplazar los valores de *"x"* encontrando los de *"y"* para completar cada tabla, tal es el caso del estudiante (E_4) como se muestra en la *imagen 11*.

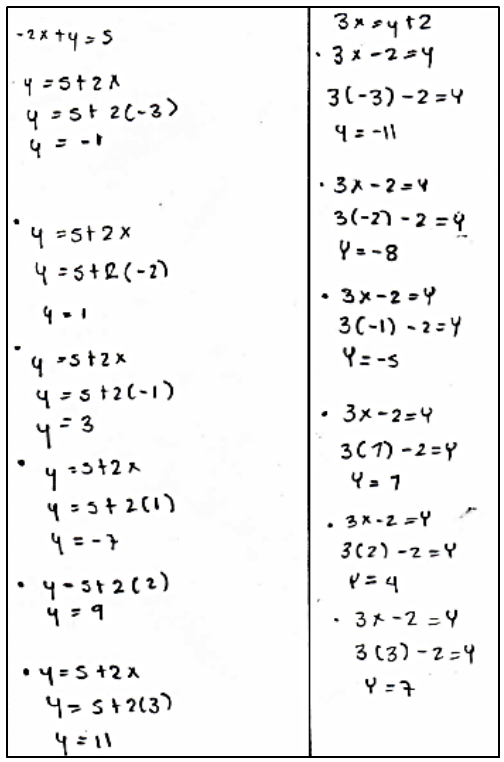


Imagen 11. Evidencia de tratamiento en el registro algebraico y procedimientos para completar las tablas.

Cuestionario diagnóstico

$$\begin{cases} -2x + y = 5 & \textit{ecuación } 1 \\ 3x = y + 2 & \textit{ecuación } 2 \end{cases}$$

TABLA 1: Ecuación 1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-1	1	3	5	7	9	11

TABLA 2: Ecuación 2

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-11	-8	-5	-2	1	4	7

Imagen 12. Evidencia de conversión del registro algebraico al tabular. Cuestionario diagnóstico.

Las ecuaciones que conforman el sistema son presentadas al estudiante de manera implícita. Se evidenció en la *figura 5* que un 20% de los estudiantes no realizó correctamente el *tratamiento* de cada una de las ecuaciones, es decir, no hicieron el despeje correcto en el sentido de expresarlas explícitamente, sin importar la dependencia de las variables, por lo cual dificultó la transición entre los registros algebraico y tabular, como se muestra en la *figura 4 y 5*.

Se aclara que la diferencia de porcentajes respecto a la *conversión* algebraico al tabular en los puntos primero y tercero es del 13%, eso sucedió porque en el punto primero, una ecuación del sistema fue de manera explícita y la otra de manera implícita mientras que en el punto tercero el sistema estaba planteado implícitamente. Se concluye que cuando un sistema de ecuaciones lineales 2×2 se presenta implícitamente en el registro algebraico se debe recurrir al *tratamiento* en este mismo registro, para expresarlo explícitamente sin importar la dependencia de las variables. Es primordial para llevar a cabo la *conversión* del registro algebraico al tabular.

El cuarto punto tenía como propósito conocer si el estudiante recurre algún método tanto algebraico como gráfico, para solucionar un sistema de ecuaciones lineales 2×2.

Resolver un sistema de ecuaciones consiste en hallar los valores de las variables que cumplan simultáneamente ambas ecuaciones. Observa el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\,x + y = 11 \; Ecuación\ 1 \\ x + \frac{y}{2} = 7 \quad\; Ecuación\ 2 \end{cases}$$

Al resolver el sistema se obtiene:

A) $x = 0,\ y = 11$

B) $x = 5,\ y = 4$

C) $x = 6,\ y = 2$

D) $x = 8,\ y = -1$

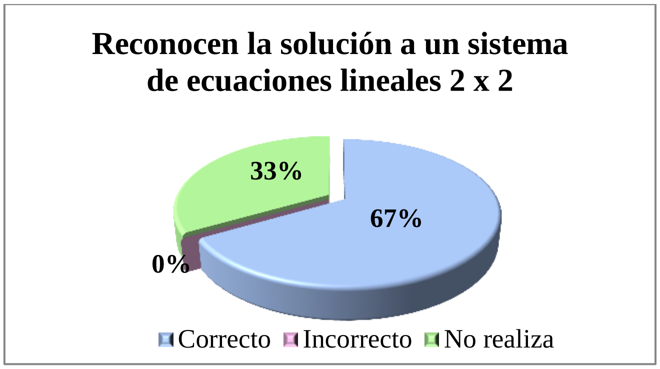


Figura 6. Reconocimiento de la respuesta que satisface al sistema de ecuaciones. Cuestionario diagnóstico. Fuente: elaboración propia.

La *figura 6* muestra que el 33% de los estudiantes no realizan procedimientos dejando en blanco el espacio para responder. Mientras que el 67% de los estudiantes reconocieron que la solución a un sistema es encontrar los valores (*x* e *y*) que deben satisfacer simultáneamente al par de ecuaciones, por ejemplo, los estudiantes (E_7, E_{15}) acertaron que la respuesta correcta son los valores $x = 6, y = 2$ remplazaron en cada una de las ecuaciones cumpliéndose las igualdades, se evidenció que no utilizaron algún método para solucionar el sistema como se muestra en la *imagen 13*

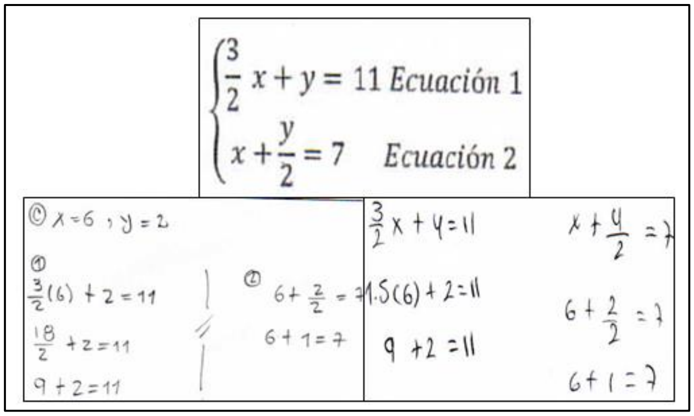


Imagen 13. Evidencia de la forma como los estudiantes comprobaron que los valores de las variables cumplen simultáneamente ambas ecuaciones. Cuestionario diagnóstico.

El quinto punto tenía el propósito de conocer la *conversión* del registro tabular al registro algebraico.

Dado las siguientes tablas encuentre el sistema de ecuaciones lineales 2×2.

Tabla de valores 1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-2	0	2	4	6	8	10

Tabla de valores 2

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$

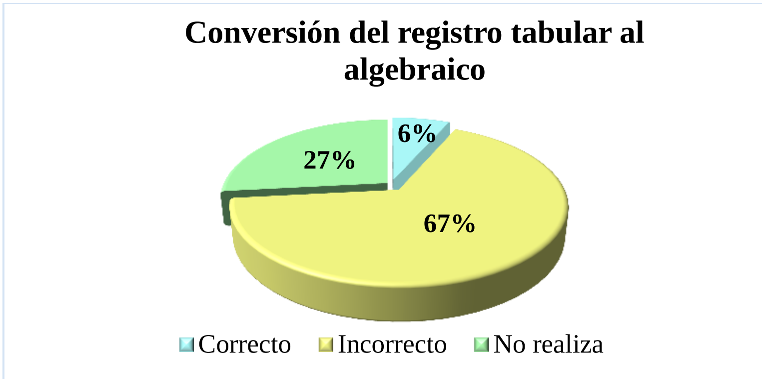


Figura 7. Conversión del registro tabular al algebraico. Cuestionario diagnóstico.

Fuente: elaboración propia.

La *figura 7* muestra que el 6% de los estudiantes realizó la *conversión* correctamente (E_6) resolvió de la siguiente manera: tomó dos pares ordenados $(x_1, y_1)\ y\ (x_2, y_2)$ en cada tabla. Luego, halló el valor de la pendiente reemplazando en la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y finalmente utilizó la expresión algebraica de línea recta de manera explícita, es decir, la ecuación de la forma $y = mx + b$, donde m es la pendiente y b el intercepto con el eje de las ordenadas, se resalta que identificó el intercepto con el eje *"y"* en el registro tabular como se muestra en la *imagen 14*.

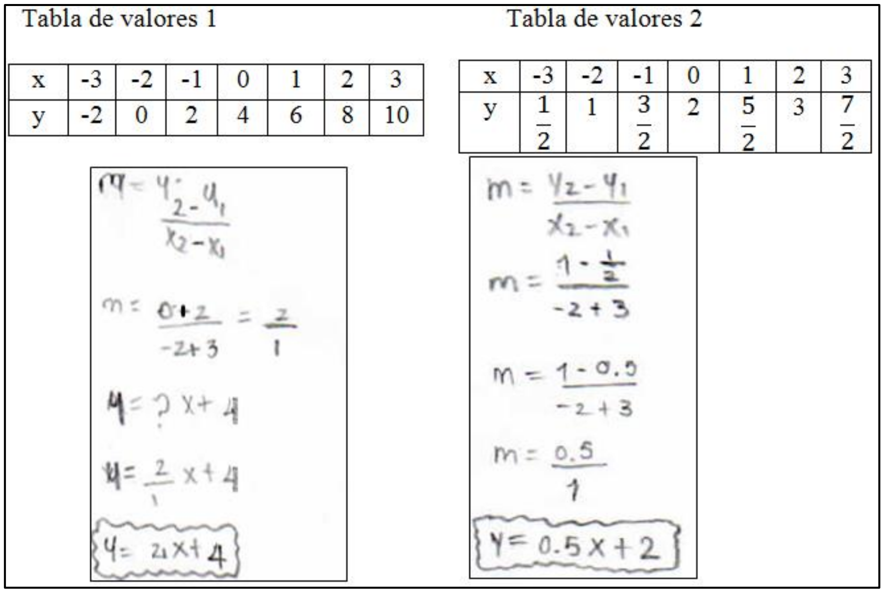


Imagen 14. Conversión correcta del registro tabular al algebraico. Cuestionario diagnóstico.

De la *figura 7* se observa que una cifra significativa del 67% de los estudiantes realizó la *conversión* incorrecta, uno de los errores comunes es hallar el valor de la pendiente, como es el caso del estudiante (E_1) como se muestra en la *imagen 15*, donde no identificó correctamente los pares ordenados (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de la tabla, para luego sustituir en la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Finalmente el 27% de los estudiantes no realizó la *conversión* dejando el espacio en blanco.

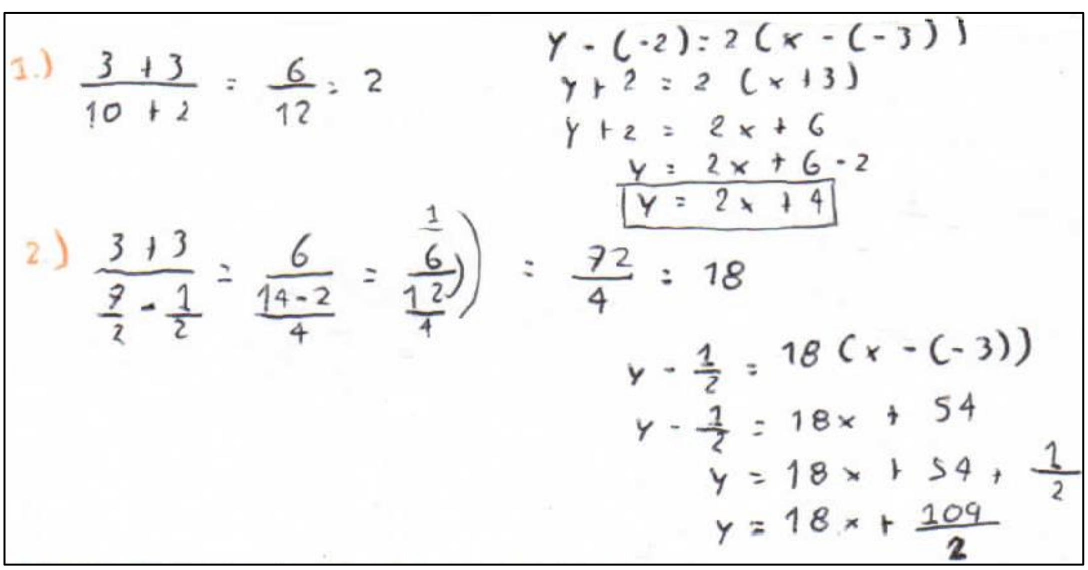


Imagen 15. Conversión incorrecta del registro tabular al gráfico. Cuestionario diagnóstico.

Además, se observó que otra de las dificultades es la *conversión* del registro tabular al algebraico, se presentó al usar la expresión matemática punto pendiente para encontrar la ecuación, pero no reemplazaron correctamente los valores, identificándose deficiencia en ley de signos al momento de operar y no hicieron *tratamientos* adecuados para dejar expresada una ecuación explícitamente como se muestra en la *imagen 16.*

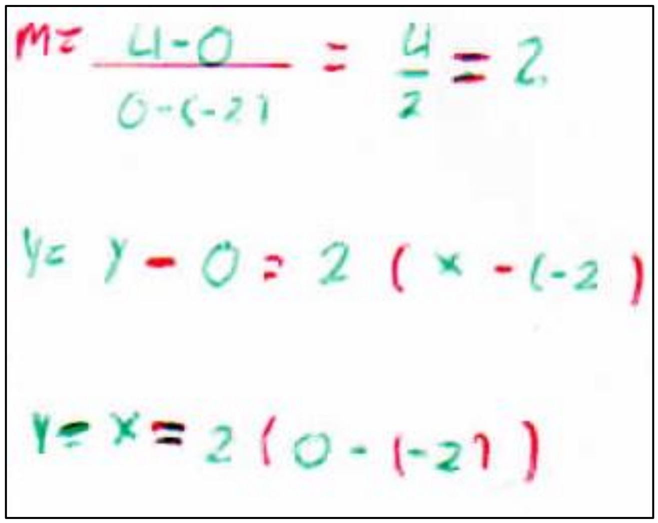
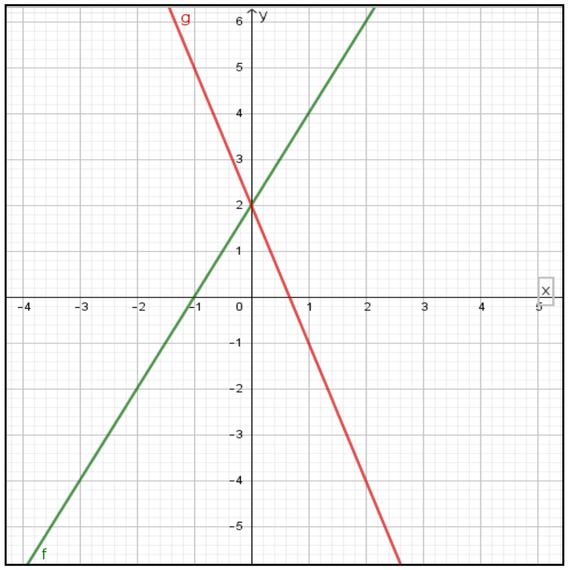


Imagen 16. Evidencia de errores en la conversión del registro tabular al registro algebraico. Cuestionario diagnóstico.

El sexto punto tenía como propósito identificar la solución de un sistema de ecuaciones lineales 2×2 por método gráfico y conocer la forma de realizar la *conversión* del registro gráfico al registro algebraico.

Se muestra de manera gráfica un sistema de ecuaciones lineales 2×2, encuentre las ecuaciones del sistema y halle valores (*x* e *y*) que cumplan simultáneamente ambas ecuaciones.



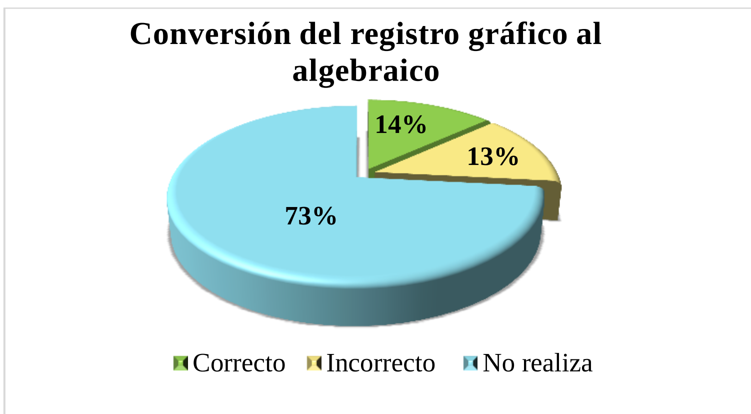


Figura 8. Conversión del registro gráfico al algebraico. Cuestionario diagnóstico.

Fuente: elaboración propia.

La figura anterior muestra que el 73% de los estudiantes, no realizó la *conversión* establecida del registro gráfico al algebraico, lo cual implica que esta actividad cognitiva es la menos espontanea. El 14% realizaron la *conversión* de manera correcta encontrando las ecuaciones; por ejemplo el estudiantes (E_3) analizó la gráfica, identificando el intercepto con el eje de las ordenadas de cada una de las rectas en el registro gráfico, y para hallar el valor de la pendiente utilizaron la expresión de la pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ a partir de dos pares ordenados, expresando las ecuaciones explícitamente, además, identificó el punto de intersección entre las rectas pero no verificó si estos valores satisfacen al sistema como muestran en la *imagen 17*.

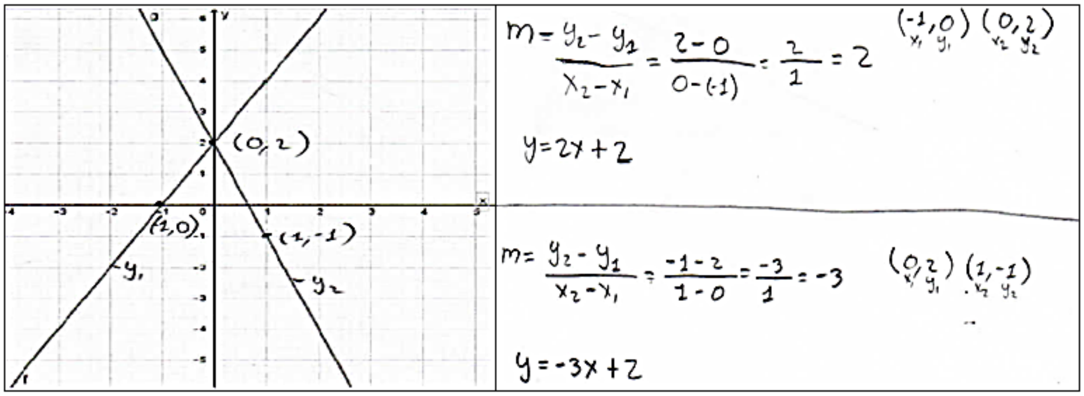


Imagen 17. Evidencia de conversión correcta del registro gráfico al algebraico. Cuestionario diagnóstico.

La *figura 8* muestra que el 13% de los estudiantes realizó la *conversión* de manera incorrecta y una de las dificultades encontradas para hacer el cambio de registro, es que no reconocieron el punto de corte con el eje de las ordenadas en el registro gráfico. Otra de las dificultades es no identificar un par ordenado (x, y) en el registro gráfico, el cual es indispensable para hallar el valor de la pendiente, cuando se quiere utilizar la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Como ejemplo el estudiante (E_{15})

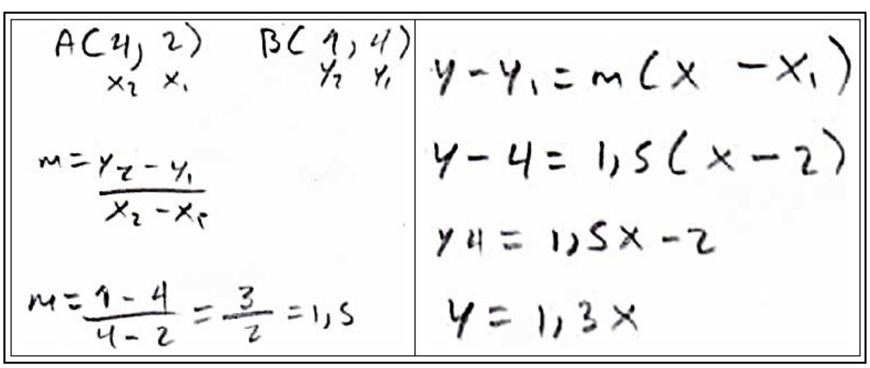


Imagen 18. Evidencia de errores comunes en la conversión del registro gráfico al algebraico. Cuestionario diagnóstico.

Se resalta del análisis del punto 6 que ningún estudiante reconoce el método gráfico como solución a un sistema de ecuaciones lineales 2×2.

A continuación, se realiza el análisis de las relaciones entre dos registros, así.

Tabla 1
Relaciones entre registros. Cuestionario diagnóstico

Conversiones			
Primer relación	Registro algebraico	$\longleftrightarrow$	Registro gráfico
Tercera relación	Registro algebraico	$\longleftrightarrow$	Registro tabular

Fuente: elaboración propia

La primera relación del registro algebraico al gráfico se observó que ningún estudiante realizó la *conversión*, lo que indica que es una de las actividades cognitivas menos espontanea en los estudiantes de la I E Rafael Reyes. En comparación con su inverso, la *conversión* del registro gráfico al algebraico se observó que tan solo el 14% lo realizó de manera correcta, el 13% de manera incorrecta y el 73% no lo realizaron. Por tanto, de manera general se concluye que existe gran dificultad en este tipo de conversiones.

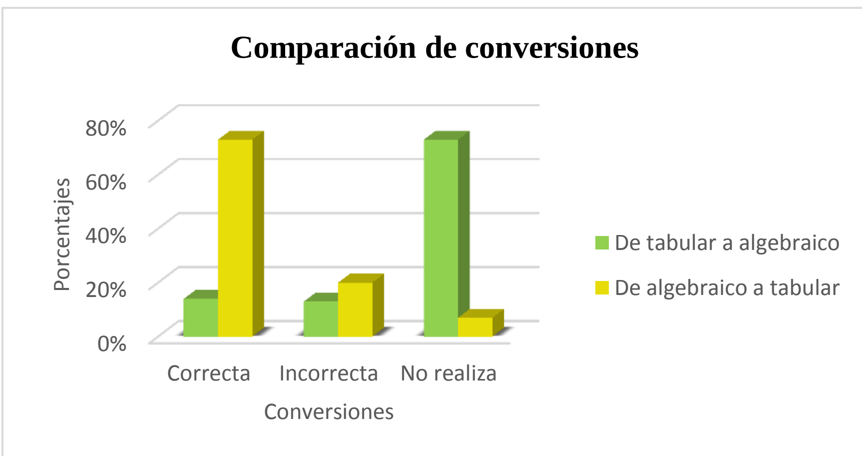


Figura 9. Comparación de conversiones de los puntos 3 y 5. Cuestionario diagnóstico.

Fuente: elaboración propia.

La *figura 9* muestra la *conversión* del registro algebraico al tabular la cual se les facilita significativamente a los estudiantes de la I. E Rafael Reyes, mientras que en la *conversión* del registro tabular al algebraico existe mayor grado de dificultad.

Dimensión didáctica: análisis de texto guía

Se hizo con el fin de conocer las actividades cognitivas asociadas de *tratamiento* y *conversión* en la teoría de los registros de representación semiótica, y los registros frecuentemente utilizados en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales 2×2.

El libro inicia con una presentación de una situación en registro verbal de la siguiente manera

> En una casa editorial se quieren producir libros en dos presentaciones, una como libro de bolsillo y la otra como edición pasta dura. Si para fabricar los textos, estos deben pasar por dos procesos uno de cosido y otro de pegado, donde los libros de bolsillo se demoran 3 minutos para el cosido y 5 minutos para el pegado, y la edición en pasta dura requiere de 4 minutos para el cosido y 2 minutos para el pegado. Si se sabe que la máquina para el cosido está disponible 6 horas y la máquina de pegado 7 horas, ¿cómo se representa mediante ecuaciones la cantidad de libros que se podrían producir de cada presentación?
>
> **Primero**, para responder la pregunta, se identifican las variables.
>
> *x*: Cantidad de libros de bolsillo. *y*: Cantidad de libros de pasta dura.

Imagen 19. Enunciado del problema en el registro verbal.

Como primer momento realizan la identificación de las variables en lenguaje verbal donde asignan la letra *"x"* a una variable que representa la cantidad de libros de bolsillo, y asignan la letra "*y*" a otra variable que representa la cantidad de libros de pasta dura, que tienen como finalidad hacer la *conversión* al registro algebraico.

Luego, se describe la información en la siguiente tabla.

	Cantidad	Tiempo en minutos	
		Cosido	Pegado
Libros de bolsillo	x	$3x$	$5x$
Libros de pasta dura	y	$4y$	$2y$
Necesario		$3x + 4y$	$5x + 2y$
Disponible		$6 \cdot 60 = 360$	$7 \cdot 60 = 420$

Imagen 20. Evidencia de conversión del registro verbal al algebraico.

Luego de reconocer las variables, hacen la relación con el tiempo de cosido con el de pegado. Para continuar el proceso de *conversión*, las ecuaciones que representan la situación son mediante la relación con *"x"* cantidad de libros de bolsillo con el tiempo de pegado, e *"y"* cantidad de libros de pasta dura con el tiempo de pegado. Con el fin de trabajar las mismas unidades de tiempo hacen el paso de horas a minutos del tiempo disponible en cada máquina. Como se presenta en la *imagen 20.*

Finalmente, como las máquinas para coser y pegar, se destinan a la producción de los libros, entonces, se tiene:

$3x + 4y = 360$ Tiempo disponible de la máquina para coser los libros.

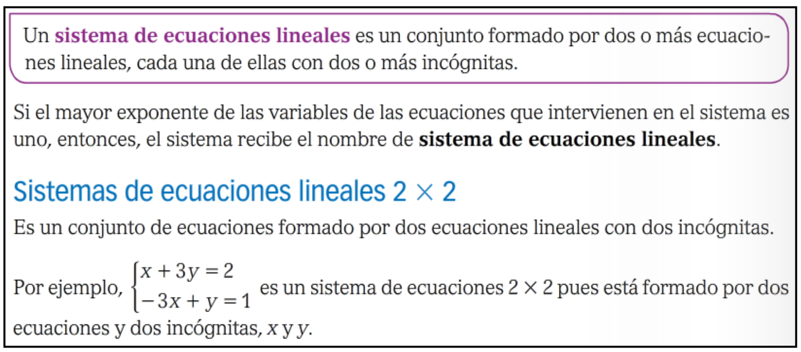
$5x + 2y = 420$ Tiempo disponible de la máquina para pegar los libros.

Por tanto, las ecuaciones que representan la cantidad de libros a producir de cada presentación son: $3x + 4y = 360$ y $5x + 2y = 420$.

Imagen 21. Evidencia de conversión registro del registro verbal al algebraico.

Por último logran la *conversión* mostrando el sistema de ecuaciones lineales 2×2, donde la primera ecuación es la multiplicación del tiempo de cosido para libros de bolsillo por *"x"* (cantidad de libros de bolsillo) más la multiplicación del tiempo de cosido para libros de pasta por *"y"* (cantidad de libros de pasta) igualada al tiempo disponible de la máquina para el cosido, la segunda ecuación es la multiplicación del tiempo de pegado para libros de bolsillo por *"x"* (cantidad de libros de bolsillo) más la multiplicación del tiempo de pegado para libros de pasta por *"y"* (cantidad de libros de pasta) igualada al tiempo disponible de la máquina para el pegado, es decir, la primera ecuación es la relación de cada tipo de libro con los tiempos de cosido igualada con el tiempo disponible de cosido de la máquina y la segunda es la relación de cada tipo de libro con los tiempos de pegado con el tiempo disponible de pegado de la máquina, como se presenta en la *imagen 21*.

En este primer acercamiento al objeto matemático se muestra la *conversión* del registro verbal al algebraico, detallando paso a paso dicha *conversión* de acuerdo a los datos presentados, como estrategia utilizaron una tabla para el proceso.



Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto formado por dos o más ecuaciones lineales, cada una de ellas con dos o más incógnitas.

Si el mayor exponente de las variables de las ecuaciones que intervienen en el sistema es uno, entonces, el sistema recibe el nombre de **sistema de ecuaciones lineales**.

Sistemas de ecuaciones lineales 2×2

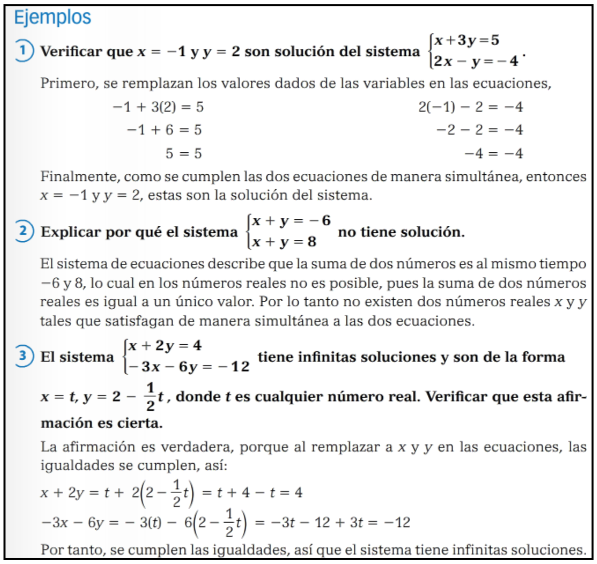
Es un conjunto de ecuaciones formado por dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Por ejemplo, $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ -3x + y = 1 \end{cases}$ es un sistema de ecuaciones 2×2 pues está formado por dos ecuaciones y dos incógnitas, x y y.

Imagen 22. Evidencia de definición y ejemplo del objeto matemático sistema de ecuaciones.

La *imagen 22* muestra un ejemplo de un sistema de ecuaciones lineales 2×2 en el registro algebraico, indicando que el exponente de las variables es uno y está formado por dos ecuaciones con dos incógnitas. Dentro de la definición no se realiza la diferenciación de objeto matemático con su representación algebraica y no presentan este objeto en otros registros semióticos para su reconocimiento.

Para la solución de un sistema de ecuaciones en el libro se plantean tres ejemplos de manera algebraica como se observa en la *imagen 23*: el primero es la verificación cuando reemplazan los valores dados que cumplen de manera simultánea al sistema, el segundo explica por qué un sistema no tiene solución, y el tercero muestra cuando un sistema tiene infinitas soluciones.



Ejemplos

1 **Verificar que $x = -1$ y $y = 2$ son solución del sistema $\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x-y=-4 \end{cases}$.**

Primero, se remplazan los valores dados de las variables en las ecuaciones,

$$-1 + 3(2) = 5 \qquad 2(-1) - 2 = -4$$
$$-1 + 6 = 5 \qquad -2 - 2 = -4$$
$$5 = 5 \qquad -4 = -4$$

Finalmente, como se cumplen las dos ecuaciones de manera simultánea, entonces $x = -1$ y $y = 2$, estas son la solución del sistema.

2 **Explicar por qué el sistema $\begin{cases} x+y=-6 \\ x+y=8 \end{cases}$ no tiene solución.**

El sistema de ecuaciones describe que la suma de dos números es al mismo tiempo -6 y 8, lo cual en los números reales no es posible, pues la suma de dos números reales es igual a un único valor. Por lo tanto no existen dos números reales x y y tales que satisfagan de manera simultánea a las dos ecuaciones.

3 **El sistema $\begin{cases} x+2y=4 \\ -3x-6y=-12 \end{cases}$ tiene infinitas soluciones y son de la forma $x = t$, $y = 2 - \frac{1}{2}t$, donde t es cualquier número real. Verificar que esta afirmación es cierta.**

La afirmación es verdadera, porque al remplazar a x y y en las ecuaciones, las igualdades se cumplen, así:

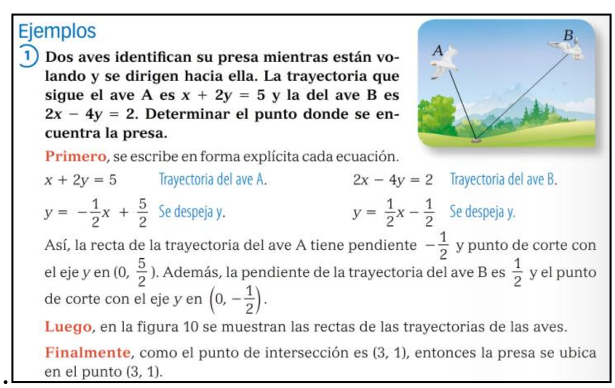
$$x + 2y = t + 2\left(2 - \frac{1}{2}t\right) = t + 4 - t = 4$$
$$-3x - 6y = -3(t) - 6\left(2 - \frac{1}{2}t\right) = -3t - 12 + 3t = -12$$

Por tanto, se cumplen las igualdades, así que el sistema tiene infinitas soluciones.

Estos ejemplos son presentados en registro algebraico, no se evidencia conversión a registro gráfico como alternativa para explicar la relación algebraica y gráfica de las posibles soluciones de un sistema de ecuaciones. Esto muestra la desarticulación de registros.

Imagen 23. Evidencia solución a un sistema de ecuaciones.

La *imagen 24* presenta un ejemplo donde el sistema es dado en el registro algebraico; de cada ecuación reconocen el valor de la pendiente y la coordenada de intersección con el eje *"y"*. Luego ofrecen la solución al sistema explicando el punto donde se intersectan las rectas y lo hacen relacionar con una grafica la cual no esta ubicada en un plano cartesiano. Esto muestra que no hacen una relación adecuada del registro algebraico con el registro gráfico. Se resalta que realizan los debidos *tratamientos* a cada una de las ecuaciones que conforman el sistema expresándolas explícitamente.



Ejemplos

1 **Dos aves identifican su presa mientras están volando y se dirigen hacia ella. La trayectoria que sigue el ave A es $x + 2y = 5$ y la del ave B es $2x - 4y = 2$. Determinar el punto donde se encuentra la presa.**

Primero, se escribe en forma explícita cada ecuación.

$x + 2y = 5$ Trayectoria del ave A. $\qquad 2x - 4y = 2$ Trayectoria del ave B.

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ Se despeja y. $\qquad y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ Se despeja y.

Así, la recta de la trayectoria del ave A tiene pendiente $-\frac{1}{2}$ y punto de corte con el eje y en $\left(0, \frac{5}{2}\right)$. Además, la pendiente de la trayectoria del ave B es $\frac{1}{2}$ y el punto de corte con el eje y en $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

Luego, en la figura 10 se muestran las rectas de las trayectorias de las aves.

Finalmente, como el punto de intersección es (3, 1), entonces la presa se ubica en el punto (3, 1).

Imagen 24. Evidencia de ejemplo relacionando registro gráfico con el algebraico.

En los métodos de sustitución, igualación, reducción y determinantes se presentan dos ejemplos, indicando los pasos para solucionar un sistema de ecuaciones con cada método. Algo particular de los ejemplos planteados, es que los primeros ejemplos muestran un sistema de ecuaciones en el registro algebraico donde lo único que se evidencia es la actividad de *tratamiento* dentro del mismo registro. Los segundo, es una situación en registro verbal (enunciado), inicialmente se identifican las variables de manera verbal, es decir, hacen *tratamiento* en este registro. En el siguiente paso plantean el sistema de ecuaciones, evidenciándose la *conversión* entre registro verbal al algebraico. Finalmente resuelven el sistema de acuerdo al método estudiado, señalando la solución de manera algebraica, sin relacionar con otros registros. Como se muestra en la *figura 25*:

Ejemplos

1) **Usar el método de sustitución, para solucionar el sistema de ecuaciones lineales** $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -4x + 3y = 2 \end{cases}$.

Primero, se enumeran las ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x + y = 4 (1) \\ -4x + 3y = 2 (2) \end{cases}$$

Segundo, se despeja una de las variables en una de las dos ecuaciones.

$2x + y = 4$ Ecuación (1).
$y = 4 - 2x$ Se despeja y.

Tercero, se remplaza y en la ecuación (2).

$-4x + 3y = 2$ Ecuación (2).
$-4x + 3(4 - 2x) = 2$ Se sustituye y por $4 - 2x$.
$-4x + 12 - 6x = 2$ Se multiplica.
$-10x + 12 = 2$ Se reducen términos semejantes.
$-10x = -10$ Se resta 12.
$x = \frac{-10}{-10} = 1$ Se despeja x.

Así, el valor de x es 1.

Luego, se remplaza el valor obtenido para hallar y en la ecuación 1.

$2x + y = 4$ Ecuación (1).
$2(1) + y = 4$ Se remplaza x por 1.
$2 + y = 4$ Se multiplica.
$y = 4 - 2 = 2$ Se despeja y.

Así, el valor de y es 2.

Finalmente, se verifica la solución en el sistema de ecuaciones.

Ecuación (1)	Ecuación (2)
$2x + y = 4$	$-4x + 3y = 2$
$2(1) + (2) = 4$	$-4(1) + 3(2) = 2$

2) **Determinar dos números cuya resta es 15 y la suma del doble del primero con la mitad del segundo es 5.**

Primero, se asignan las variables.

a: Número mayor. b: Número menor.

Segundo, se plantean las ecuaciones:

$a - b = 15$ La resta de los números es 15.
$2a + \frac{1}{2}b = 5$ El doble del primer número más la mitad del segundo es 5.

Tercero, se enumeran las ecuaciones.

$a - b = 15$ Ecuación (1).
$2a + \frac{1}{2}b = 5$ Ecuación (2).

Cuarto, se despeja a en la ecuación (1).

$a - b = 15$ Ecuación (1).
$a = 15 + b$ Se despeja a.

Luego, se remplaza a en la ecuación (2).

$2a + \frac{1}{2}b = 5$ Ecuación (2).
$2(15 + b) + \frac{1}{2}b = 5$ Se remplaza a por $15 + b$.
$30 + 2b + \frac{1}{2}b = 5$ Se multiplica.
$30 + \frac{5}{2}b = 5$ Se suman términos semejantes.
$\frac{5}{2}b = -25$ Se resta 30.
$b = \frac{-25 \cdot 2}{5}$ Se despeja b.
$b = -10$ Se multiplica y se simplifica.

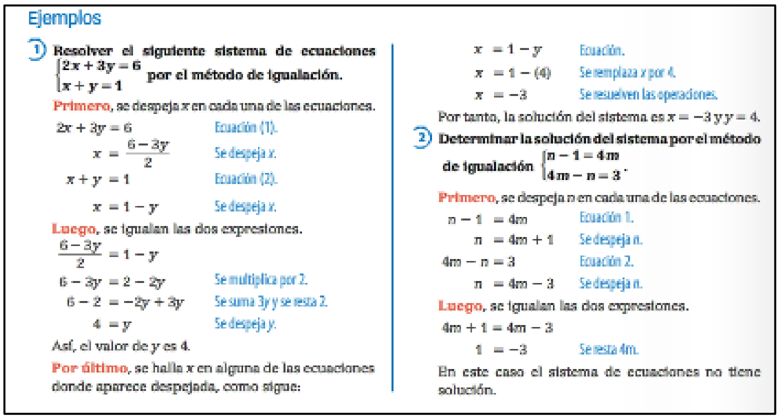
Así, el valor de b es -10.

Por último, se encuentra el valor de a.

$a - b = 15$ Ecuación (1).
$a - (-10) = 15$ Se remplaza el valor de b.
$a + 10 = 15$ Se eliminan paréntesis.
$a = 15 - 10 = 5$ Se despeja a y se resuelve.

Imagen 25. Ejemplos de conversión del registro verbal al algebraico y tratamiento en ambos registros.

En la *imagen 26* hay dos ejemplos explicando el método de igualación, donde dan el sistema de ecuaciones en el registro algebraico. Inicialmente realizaron la actividad de *tratamiento* a cada ecuación, presentándolas de manera explícita, es decir, una variable en función de la otra, para luego igualarlas y encontrar la solución. No se aprovechó el despeje para hacer una tabla de valores y luego graficar para mostrar el sistema mediante la coordinación entre registros.



Ejemplos

1 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+3y=6 \\ x+y=1 \end{cases}$ por el método de igualación.

Primero, se despeja x en cada una de las ecuaciones.

$2x+3y=6$ Ecuación (1).

$x=\frac{6-3y}{2}$ Se despeja x.

$x+y=1$ Ecuación (2).

$x=1-y$ Se despeja x.

Luego, se igualan las dos expresiones.

$\frac{6-3y}{2}=1-y$

$6-3y=2-2y$ Se multiplica por 2.

$6-2=-2y+3y$ Se suma $3y$ y se resta 2.

$4=y$ Se despeja y.

Así, el valor de y es 4.

Por último, se halla x en alguna de las ecuaciones donde aparece despejada, como sigue:

$x=1-y$ Ecuación.

$x=1-(4)$ Se remplaza y por 4.

$x=-3$ Se resuelven las operaciones.

Por tanto, la solución del sistema es $x=-3$ y $y=4$.

2 Determinar la solución del sistema por el método de igualación $\begin{cases} n-1=4m \\ 4m-n=3 \end{cases}$.

Primero, se despeja n en cada una de las ecuaciones.

$n-1=4m$ Ecuación 1.

$n=4m+1$ Se despeja n.

$4m-n=3$ Ecuación 2.

$n=4m-3$ Se despeja n.

Luego, se igualan las dos expresiones.

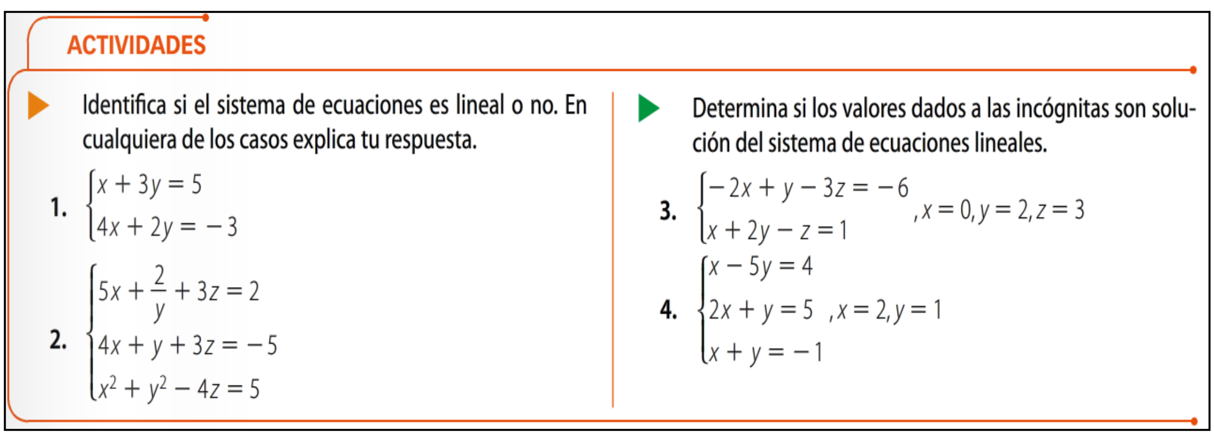
$4m+1=4m-3$

$1=-3$ Se resta $4m$.

En este caso el sistema de ecuaciones no tiene solución.

Imagen 26. Evidencia de ejemplos.

Se concluye de las actividades propuestas que para el reconocimiento de un sistema de ecuaciones se enfatiza el registro algebraico, como alternativa para el aprendizaje del objeto matemático, como se muestra en la *imagen 27*.



ACTIVIDADES

Identifica si el sistema de ecuaciones es lineal o no. En cualquiera de los casos explica tu respuesta.

1. $\begin{cases} x+3y=5 \\ 4x+2y=-3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x+\frac{2}{y}+3z=2 \\ 4x+y+3z=-5 \\ x^2+y^2-4z=5 \end{cases}$

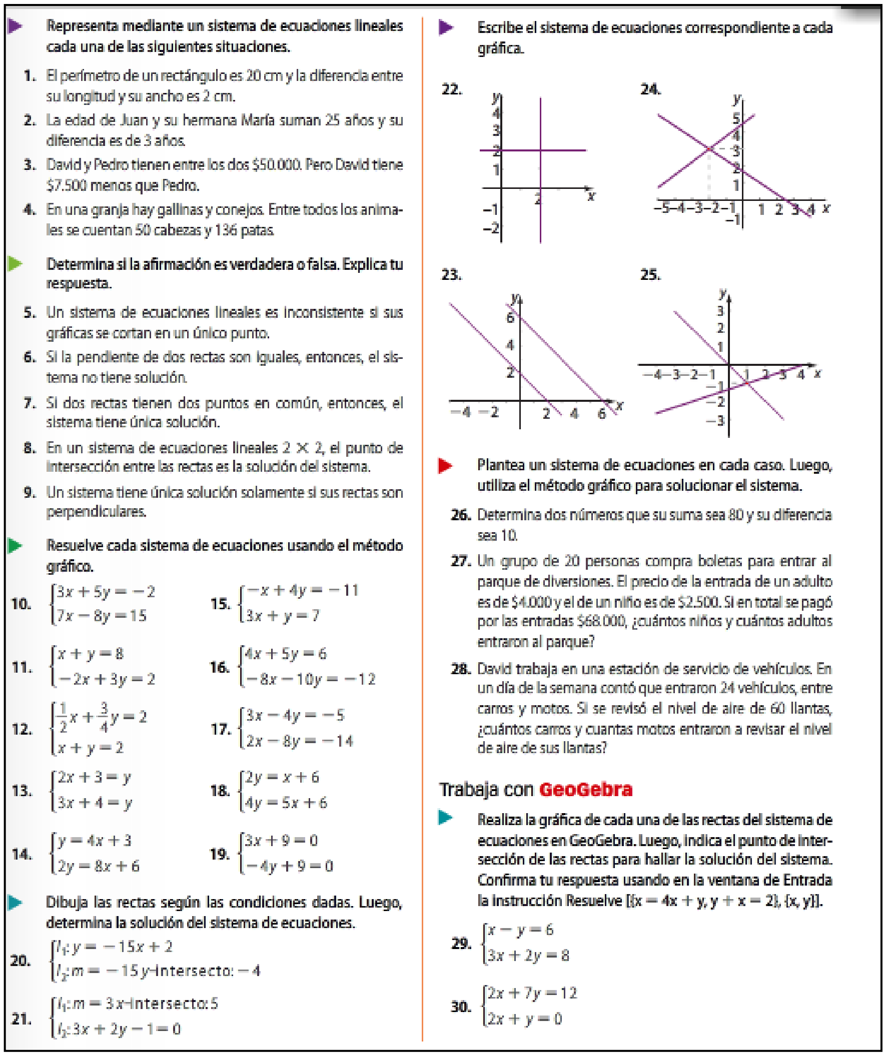
Determina si los valores dados a las incógnitas son solución del sistema de ecuaciones lineales.

3. $\begin{cases} -2x+y-3z=-6 \\ x+2y-z=1 \end{cases}, x=0, y=2, z=3$

4. $\begin{cases} x-5y=4 \\ 2x+y=5 \\ x+y=-1 \end{cases}, x=2, y=1$

Imagen 27. Evidencia de actividades propuestas en el registro algebraico.

La *imagen 28* evidencia las actividades propuestas para el estudiante, se estimula la *conversión* entre registros, pero de forma separada. Por ejemplo, de los puntos del uno al nueve se enfatiza la *conversión* del lenguaje verbal al registro algebraico; en los puntos del 10 al 21 se promueve *conversión* del registro algebraico al gráfico, sin indicar que se debe realizar tablas de valores para realizar en cambio de registro, sin embargo, allí se espera la actividad *tratamiento* en el registro algebraico en cada una de las ecuaciones que conforman el sistema. Finalemente los puntos del 22 al 25 tienen como finalidad la actividad de *conversión* del registro gráfico al algebraico y los puntos del 26 al 28 articulan tres registros: verbal, algebraico y gráfico, pretendiendo que hagan *conversión* del registro verbal al registro algebraico (planteamiento del sistema de ecuaciones lineales 2×2) y luego el cambio de registro del algebraico al gráfico presentando las rectas en el mismo plano, para que el estudiante reconozca geométricamente, las posibles soluciones.



Representa mediante un sistema de ecuaciones lineales cada una de las siguientes situaciones.

1. El perímetro de un rectángulo es 20 cm y la diferencia entre su longitud y su ancho es 2 cm.
2. La edad de Juan y su hermana María suman 25 años y su diferencia es de 3 años.
3. David y Pedro tienen entre los dos \$50.000. Pero David tiene \$7.500 menos que Pedro.
4. En una granja hay gallinas y conejos. Entre todos los animales se cuentan 50 cabezas y 136 patas.

Determina si la afirmación es verdadera o falsa. Explica tu respuesta.

5. Un sistema de ecuaciones lineales es inconsistente si sus gráficas se cortan en un único punto.
6. Si la pendiente de dos rectas son iguales, entonces, el sistema no tiene solución.
7. Si dos rectas tienen dos puntos en común, entonces, el sistema tiene única solución.
8. En un sistema de ecuaciones lineales 2×2, el punto de intersección entre las rectas es la solución del sistema.
9. Un sistema tiene única solución solamente si sus rectas son perpendiculares.

Resuelve cada sistema de ecuaciones usando el método gráfico.

10. $\begin{cases} 3x+5y=-2 \\ 7x-8y=15 \end{cases}$
11. $\begin{cases} x+y=8 \\ -2x+3y=2 \end{cases}$
12. $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y=2 \\ x+y=2 \end{cases}$
13. $\begin{cases} 2x+3=y \\ 3x+4=y \end{cases}$
14. $\begin{cases} y=4x+3 \\ 2y=8x+6 \end{cases}$
15. $\begin{cases} -x+4y=-11 \\ 3x+y=7 \end{cases}$
16. $\begin{cases} 4x+5y=6 \\ -8x-10y=-12 \end{cases}$
17. $\begin{cases} 3x-4y=-5 \\ 2x-8y=-14 \end{cases}$
18. $\begin{cases} 2y=x+6 \\ 4y=5x+6 \end{cases}$
19. $\begin{cases} 3x+9=0 \\ -4y+9=0 \end{cases}$

Dibuja las rectas según las condiciones dadas. Luego, determina la solución del sistema de ecuaciones.

20. $\begin{cases} l_1: y=-15x+2 \\ l_2: m=-15 \text{ y-intersecto: } -4 \end{cases}$
21. $\begin{cases} l_1: m=3 \text{ x-intersecto: } 5 \\ l_2: 3x+2y-1=0 \end{cases}$

Escribe el sistema de ecuaciones correspondiente a cada gráfica.

22.

24.

23.

25.

Plantea un sistema de ecuaciones en cada caso. Luego, utiliza el método gráfico para solucionar el sistema.

26. Determina dos números que su suma sea 80 y su diferencia sea 10.
27. Un grupo de 20 personas compra boletas para entrar al parque de diversiones. El precio de la entrada de un adulto es de \$4.000 y el de un niño es de \$2.500. Si en total se pagó por las entradas \$68.000, ¿cuántos niños y cuántos adultos entraron al parque?
28. David trabaja en una estación de servicio de vehículos. En un día de la semana contó que entraron 24 vehículos, entre carros y motos. Si se revisó el nivel de aire de 60 llantas, ¿cuántos carros y cuantas motos entraron a revisar el nivel de aire de sus llantas?

Trabaja con **GeoGebra**

Realiza la gráfica de cada una de las rectas del sistema de ecuaciones en GeoGebra. Luego, indica el punto de intersección de las rectas para hallar la solución del sistema. Confirma tu respuesta usando en la ventana de Entrada la instrucción Resuelve [{x = 4x + y, y + x = 2}, {x, y}].

29. $\begin{cases} x-y=6 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$
30. $\begin{cases} 2x+7y=12 \\ 2x+y=0 \end{cases}$

Imagen 28. Evidencia actividades que propone el texto guía.

Finalmente, en el texto guía no se propusieron actividades para que el estudiante desarrollara la actividad cognitiva de *formación*. En los ejemplos no se evidenció estrategias para graficar un sistema de ecuaciones lineales 2×2 y articulación de registros.

Análisis de restricciones:

Esta investigación se llevó a cabo con 15 estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Rafael Reyes de Santa Rosa de Viterbo (Boyacá), en un rango de 14 a 16 años de edad, 7 mujeres y 8 hombres. De acuerdo al plan de estudio de la Institución se contempla que el objeto matemático de estudio (los sistemas de ecuaciones lineales 2×2) es temática de grado noveno, esto indicó que la población ya ha visto el tema anteriormente nombrado, permitiendo su realización. Además, el establecimiento cuenta con aulas adecuadas donde cada estudiante tiene su escritorio para evitar traspaso de respuestas y una sala de cómputo.

Segunda fase: Concepción y análisis a priori.

En esta fase se describen las variables macro y micro didácticas, el análisis a priori y diseño de las cuatro actividades diseñadas que se pondrán en escena en la fase experimental.

Respecto a las variables macro – didácticas se consideraron aspectos de la matemática y cognitivos, así:

- ***Aspectos de la matemática***: la secuencia de actividades fue diseñada en el conjunto de los números reales, en problemas que requerían plantear sistemas de ecuaciones lineales 2×2, cuya solución pudiera ser encontrada y justificada con algún método algebraico o de manera gráfica. De allí se determinó a manera de conclusión que los sistemas pueden ser compatibles o incompatibles, como se definieron en el marco conceptual.
- ***Aspectos cognitivos***: para evidenciar la *formación* se parte de una información este proceso de evidenció en actividad 1, 2 y 3; para la *conversión* se articulan los siguientes registros: actividad 1 del gráfico al algebraico. Actividad 2 del gráfico al algebraico. Actividad 3 del verbal al algebraico, del algebraico al tabular, del tabular al gráfico, del algebraico al gráfico. Actividad 4 del tabular al gráfico, del verbal al algebraico; del gráfico al algebraico. Estos se adecúan al nivel de escolaridad de la población y los *tratamientos* son en el registro algebraico.

En las variables micro – didácticas primero se hizo la presentación y la selección de las mismas para luego hacer el análisis a priori de cada actividad, describiendo lo que se espera que el estudiante realice de acuerdo a sus conocimientos previos.

Tabla 2
Identificación de las variables que intervienen en cada actividad

Descripción de la actividad	Variables micro-didácticas
1. Consta de cuatro ítems, que permite descubrir diversas relaciones gráficas tabulares y algebraicas. Los ítems tienen las intenciones de: en el *a)* actividad de *formación* en el registro gráfico *b)* la actividad de *conversión* del registro gráfico al tabular, y el *c)* la actividad de *conversión* del tabular al algebraico.	Asociadas al registro gráfico se tiene: ➢ Ubicación de puntos y reconocimiento de la gráfica. ➢ Significado del punto de intersección entre dos rectas. Asociadas al registro tabular. ➢ Ubicación de las variables en los ejes ➢ Construcción de la tabla (s). Asociadas al registro algebraico. ➢ Reconocimiento y representación de las variables utilizadas en el sistema de ecuaciones.
2. Permite relacionar la parte gráfica con la algebraica. Un primer momento es la actividad cognitiva de *formación* en el registro gráfico, y el segundo es la actividad cognitiva de *conversión* del gráfico al algebraico.	Asociadas al registro gráfico se tiene: ➢ Adecuación de la escala para cada uno de los ejes. ➢ Ubicación de las variables en cada uno de los ejes. ➢ Reconocimiento de coordenadas y la gráfica. ➢ Reconocer los puntos de intersección de la recta con los ejes del plano cartesiano. ➢ Significado del punto de intersección entre las rectas. Asociadas al registro algebraico. ➢ Reconocimiento y representación de las variables utilizadas en el sistema de ecuaciones.
3. Consta de un enunciado permitiendo hacer la actividad de *formación* en el registro algebraico y *conversión* entre registros. Como primera instancia la *conversión* del verbal al algebraico, y como segunda conocer el método de solución a un sistema de ecuaciones lineales 2×2.	Asociadas al registro verbal ➢ Reconocimiento de las variables y datos. Asociadas al registro algebraico. ➢ Representación de las variables utilizadas en el sistema de ecuaciones. Asociadas al registro tabular. ➢ Construcción de la tabla (s) de valores Asociadas al registro gráfico se tiene: ➢ Ubicación de las variables. ➢ Selección de la escala apropiada en cada una de los ejes. ➢ Significado del punto de intersección entre dos rectas.
4. Consta de seis ítems donde se relacionan representaciones tabulares,	Asociadas al registro grafico se tiene: ➢ Reconocimiento y ubicación de las variables en los ejes del plano cartesiano.

gráficas, verbales y algebraicas, mediante la actividad de *conversión*: el *a)* es del registro tabular al gráfico. El *b)* es del registro verbal al algebraico, apoyado previamente en una representación gráfica y *tratamiento* en el registro algebraico. El ítem *d)* es conversión del registro gráfico al algebraico. En el ítem *e)* es identificar el vértice interior de la bandera de manera gráfica. Finalmente el ítem *f* comprobar el ítem anterior *(e)* con la intención de conocer el método de solución a un sistema de ecuaciones lineales 2×2.	➢ Ubicación de las coordenadas y reconocimiento de la gráfica. ➢ Identificación del punto de intersección de las rectas con el eje de las ordenadas. ➢ Significado del punto de intersección entre las rectas. Asociadas al registro tabular. ➢ Reconocimiento de las coordenadas (x, y)en cada tabla. Asociadas al registro algebraico. ➢ Reconocimiento y representación de las variables utilizadas en el sistema de ecuaciones. Asociadas al registro verbal. ➢ Comprensión del enunciado

Fuente: elaboración propia

Diseño de actividades

Se tuvo en cuenta tres factores:

- De la problemática planteada: la articulación entre registros y solución a un sistema de ecuaciones lineales 2×2 por método gráfico.
- Del análisis de texto: reconociendo el objeto matemático en otras representaciones.
- Del cuestionario diagnóstico: la actividad cognitiva de *conversión* entre registros semióticos y *tratamiento* en el registro algebraico.

En cada actividad se encontraba el siguiente encabezado:

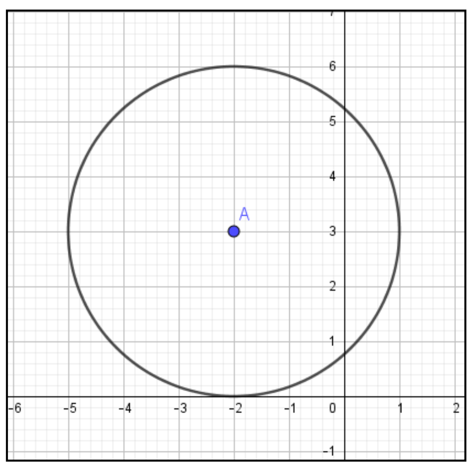
Luego se presentan cada una de las actividades

Actividad 1[1]

Según Euclides, la circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo. Ese punto fijo se denomina centro, y el valor de la equidistancia se denomina longitud del radio.

Con la definición anterior, y utilizando la distancia de Euclides, el siguiente gráfico representa una circunferencia con centro en $(-2,3)$ y radio 3.

Circunferencia Euclidea (de)



De acuerdo con Minkowski, se puede lograr una representación diferente, partiendo del mismo punto $(-2,3)$, desplazándose en forma horizontal, vertical o en ambas direcciones (sin

[1] Esta actividad surge de la secuencia didáctica la Taxi Geometría desde la perspectiva de Aulas Investigativas presentada en clase de Aulas Investigativas II del semestre I del año 2019 de la Maestría en Educación Matemática año 2019, orientada por la Doctora Lida Esperanza Riscanevo Espitia. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC).

cambiar de sentido) con el número correspondiente al radio de la representación anterior, es decir 3 unidades.

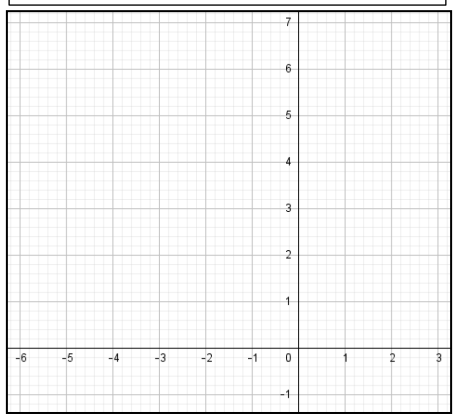
a) ¿Cuál sería la gráfica?

b) Elabore una tabla donde ubique las coordenadas cartesianas de la gráfica encontrada.

c) ¿Cuáles puntos destacaría de la gráfica?

d) Encuentre las ecuaciones de las rectas que limitan la figura.

"Figura" de Minkowski



Actividad 2

La administración municipal de Santa Rosa de Viterbo del departamento de Boyacá quiere que el monumento del expresidente de Colombia Rafael Reyes ubicado en la plaza principal quede en una zona centro dentro de este espacio público. La administración ubica el monumento en un rectángulo de la siguiente manera.

Desean saber la coordenada del centro del rectángulo, para su posterior traslado, sabiendo que el rectángulo tiene 4 unidades de ancho y 6 unidades de largo. Les piden a los estudiantes de grado décimo del Colegio Rafael Reyes de esta localidad:

a) Determinar las coordenadas de los vértices del rectángulo.

b) Encontrar la coordenada central donde se debe ubicar el monumento.

c) Comprobar que la coordenada central del rectángulo dada para ubicar el monumento, es la correcta.

Actividad 3

Los estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Rafael Reyes asistieron a una exposición de pintura y les gustó una obra de arte en forma de rectángulo; la pintura es el emblemático caballo "PALOMO" que la señora Casilda Zafra donó al libertador Simón Bolívar. Preguntaron el precio y las medidas del rectángulo para comprarla. El artista les suministro la siguiente información: el perímetro del rectángulo es de 10 $unidades$, la diferencia entre el triple del largo y el triple del ancho equivale a 9 $unidades$, y el precio es $800.000. Se miraron unos a otros y dijeron que nos les alcanzaba el dinero para la compra, una niña en broma le dijo al artista que debería regalarla y el artista acepta si le responden la siguiente pregunta ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Actividad 4

La bandera que representa a una población. Está conformada por un triángulo isósceles y dos trapecios rectangulares, los cuales la unión de estas tres figuras planas conforman un rectángulo. Para su construcción debe seguir los siguientes pasos.

a) Grafique en un solo plano cartesiano cada una de las tablas. Luego, dibuje un triángulo isósceles donde su base este en el eje de las ordenadas

Tabla 1

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-1	0	1	2	3	4	5	6	7

Tabla 2

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	13	12	11	10	9	8	7	6	5

b) De acuerdo a lo anterior, grafique cada uno de los trapecios rectangulares de tal manera que la base mayor de cada trapecio rectangular sea el doble de la longitud de la base del triángulo isósceles y el perímetro de la bandera sea 36 *unidades*. Luego, plantee un sistema de ecuaciones lineales 2×2 que le permita verificar las dimensiones de la bandera.

c) Determine los vértices del triángulo isósceles.

d) Encuentre las ecuaciones de las rectas que limitan el triángulo isósceles.

e) Halle el vértice de coordenada (x, y) del triángulo isósceles que está hacia el interior de la bandera.

f) Compruebe matemáticamente que el vértice del triángulo dado en el ítem f, sí es el que corresponde al interior.

Una vez el estudiante haya leído la actividad se solicitaba responder las siguientes preguntas siguiendo los pasos de la heurística de Polya (1965) asi:

1. Comprensión del problema.

¿Qué le pide el problema?

¿Cuáles son los datos del problema?

¿Hay información que brinda el problema que no se requiere para la solución del mismo?

2. Concebir un plan.

Escriba un plan para solucionar el problema

3. Ejecutar el plan.

Solucionar cada ítem. Nota: hacer procedimientos necesarios

4. Examinar la solución.

¿Su respuesta cumple con lo pedido en el problema? Justificar.

¿La solución tiene sentido? Justificar.

¿Considera que existe alguna otra solución para este problema? ¿Cuál sería?

En seguida se presenta el análisis a priori de lo que se espera que los estudiantes respondan de acuerdo a cada una de las variables seleccionadas.

Tabla 3
Posibles resultados esperados

Actividad	Dificultades	Soluciones
	Ítem *a*: graficar la figura de Minkowski, en el sentido de	Ítem *a*: graficar de acuerdo a la información y los desplazamientos verticales como

1	no comprender la definición de Euclides y su gráfica. Ítem *d*: planteamiento de los sistemas de ecuaciones, es decir, no realicen la *conversión* del registro grafico al algebraico.	horizontales encontrando los puntos que formarían el rombo. Ítem *b*: a partir de la gráfica encontrar las parejas ordenadas (x, y) para elaborar una tabla de valores, tomando la letra *"X"* como el eje de las abscisas y la letra *"Y"* como el eje de las ordenadas. Ítem *c*: para encontrar cada una de las ecuaciones de las rectas, utilizar: la expresión $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ para hallar el valor de la pendiente de la recta y la intersección de la recta con el eje de las ordenadas en el plano cartesiano. Ítem *d*: identifiquen que los vértices de la figura es la intersección de la prolongación de las rectas. Destacando los cuatro vértices de la figura de Minkowski.
2	Ítem *a:* no poder deducir de la gráfica cartesiana las coordenadas de los vértices del rectángulo. Ítem *b*: realizar la *conversión* del registro grafico al algebraico, es decir, plantear los sistemas de ecuaciones a partir de la gráfica.	Se espera que los estudiantes grafiquen el rectángulo de acuerdo con la información. Ítem *a*: apoyados en la representación gráfica cartesiana determinar las coordenadas del rectángulo y las variables del problema. Ítem *b*: trazando las diagonales del rectángulo, identificando la coordenada (x, y) de la intersección entre rectas. Ítem *c*: plantear un sistema de ecuaciones en cualquier registro diferente al grafico reconozcan que la intersección entre las rectas es la solución al sistema.
3	No hacer la representación gráfica de los rectángulos de acuerdo a los datos del enunciado y no lograr la actividad cognitiva de *formación* en el registro algebraico del objeto matemático, al igual que no realizar la conversión del registro verbal al algebraico.	Para graficar se espera que los estudiantes identifiquen datos y las dos variables del problema, para hacer la representación del rectángulo, que sirva como apoyo en el planteamiento del sistema de ecuaciones en el registro algebraico, es decir, la *formación* del sistema de ecuaciones lineales 2×2 y *conversión* del registro verbal al algebraico. El sistema se puede resolver por algún método algebraico o gráfico.

4	Ítem *b*: (*Conversión* del registro verbal al algebraico) no deducir datos de la representación gráfica para plantear el sistema de ecuaciones Ítem *e*: *conversión* del registro grafico al algebraico, para encontrar las ecuaciones que limitan el triángulo isósceles. Ítem *f*: reconocer que la coordenada del vértice interior a la bandera es la intersección de la prolongación de dos rectas.	Para la solución por método gráfico se espera que tomen como estrategia el registro tabular para luego graficar. Ítem *a*: graficar el sistema de ecuaciones a partir de las tablas. Ítem *b*: Reconocer la gráfica del triángulo isósceles, para deducir datos y en base al enunciado propuesto en este ítem lograr graficar la bandera, para luego, plantear el sistema de ecuaciones. Ítem *c*: a partir de la gráfica determinar las coordenadas (x, y) de los vértices del triángulo isósceles. Ítem *d*: plantear cada ecuación utilizando la expresión $y = mx + b$ donde identifiquen el intercepto de cada recta con el eje de las *"y"* gráficamente; para hallar la pendiente de cada recta utilizar la expresión $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. con las coordenadas encontradas en el ítem *c*. Ítem *e*: visualizando la gráfica se puede encontrar la coordenada (x, y) del vértice del rectángulo que está al interior de la bandera. Ítem *f*: Se espera que los estudiantes reconozcan que se está trabajando con un sistema de ecuaciones lineales 2×2, con única solución y lo planteen en el registro algebraico para comprobar la coordenada (x, y) del ítem e identificando que la intersección entre las rectas es la solución por método gráfico y sustituyan los valores de la coordenada en el par de ecuaciones cumpliendo las igualdades.

Fuente: elaboración propia.

Tercera fase: experimentación

Es la aplicación de las actividades teniendo en cuenta los horarios de clase establecidos por la Institución Educativa Rafael Reyes de Santa Rosa de Viterbo-Boyacá, el cual se diseñó el siguiente cronograma:

Tabla 4
Cronograma ejecución de actividades

Actividades	Fecha	Hora
Actividad 1	22 de abril de 2019	14 h a 16 h
Actividad 2	29 de abril de 2019	14 h a 16 h
Actividad 3	6 de mayo de 2019	14 h a 16 h
Actividad 4	13 de mayo de 2019	14 h a 16 h

Fuente: elaboración propia.

- Se entregó la actividad a cada estudiante y se explicó las generalidades: finalidad, tiempo establecido, material a utilizar. Además, se aclaró que la solución de cada actividad es de manera individual.
- Se realizó una clase introductoria para que los estudiantes conozcan la diferencia entre la métrica Euclidea con la de Minkoswki (métrica del taxista), como base para la aplicación de la actividad 1

Cuarta fase: análisis a posteriori y validación

Se analizaron las producciones escritas por los estudiantes de grado décimo de cada una de las actividades, aplicadas en la fase anterior, teniendo en cuenta dos categorías, las a priori y las emergentes.

Respecto a las categorías a priori estas son: las actividades cognitivas de *formación, tratamiento* y *conversión* de los registros de representación semiótica.

Se encontraron categorías emergentes, las cuales también se les hizo un análisis y son los pasos de Polya (1965) descritos en el diseño de las actividades, de igual manera, la tendencia de ubicación del rectángulo en el plano cartesiano de la actividad 2.

Hallazgos en cada actividad

Actividad 1

Se analizó la categoría emergente comprensión del problema, para ello se asumieron las tres preguntas mencionadas, se tuvo en cuenta si las respuestas fueron parciales, completas, o no contestaron.

Todos los estudiantes respondieron de manera parcial, donde no reconocieron algún ítem que le pide la actividad, por ejemplo que los estudiantes (E_2, E_4, E_5) no identificaron el ítem *a*, sin embargo lograron representar la figura de "Minkowski", de igual manera no especificaron que se debe hallar las ecuaciones de las rectas como se muestra en *imagen 29*.

• Tabla de valores • Rectas de la figura encontrada • Puntos destacados	• Tabla de valores. • Puntos destacados • Rectas.
Una tabla de valores con las cordenadas, puntos y rectas corespondientes	

Imagen 29. Evidencia de respuesta de forma parcial de los estudiantes (E_2, E_4, E_5) ¿Qué le pide el problema? Actividad 1

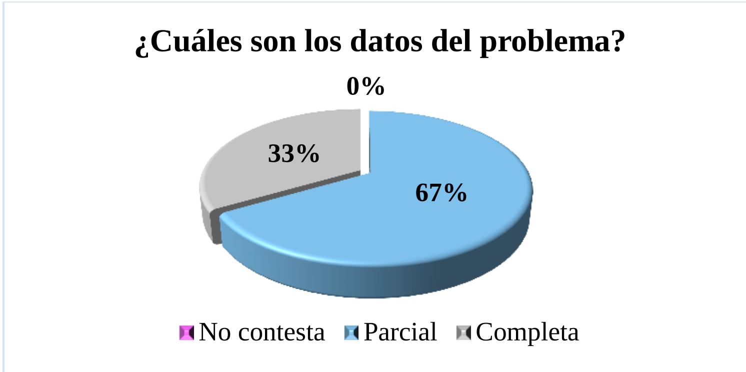


Figura 10. ¿Cuáles son los datos del problema? Actividad 1

Fuente: elaboración propia

Todos los estudiantes contestaron la pregunta, la *figura 10* muestra que el 67% respondió de manera parcial, desconociendo algún dato, por ejemplo la estudiante (E_5) no consideró la definición de circunferencia como un dato para solucionar el problema, por otro lado el estudiante (E_{11}) no identificó la definición de circunferencia y su representación gráfica como datos importantes, mientras que el estudiante (E_{12}) consideró la definición de circunferencia como dato, pero no su presentación gráfica. Ver *imagen 30*. Siguiendo la *figura 10*, el 33% respondió de manera completa y los estudiantes (E_{14}, E_{15}) reconocieron todos los datos del problema, especialmente la representación gráfica de circunferencia como un referente importante porque permite contextualizar los elementos de centro y radio.

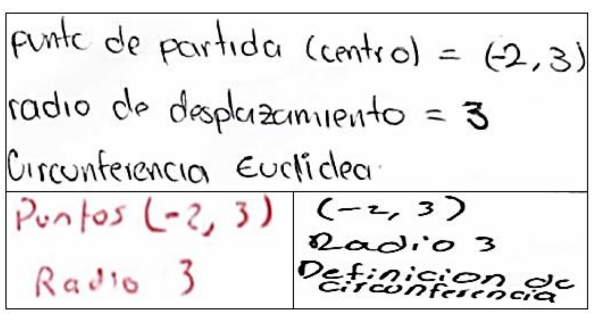
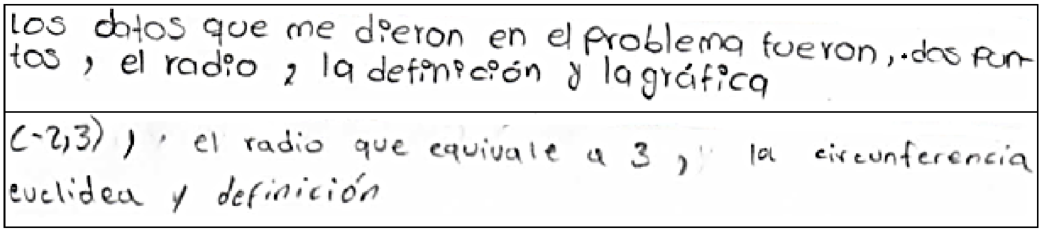


Imagen 30. Evidencia de respuestas de forma parcial del estudiantes $(\boldsymbol{E_5}, \boldsymbol{E_{11}}, \boldsymbol{E_{12}})$ ¿Cuáles son los datos del problema? Actividad 1

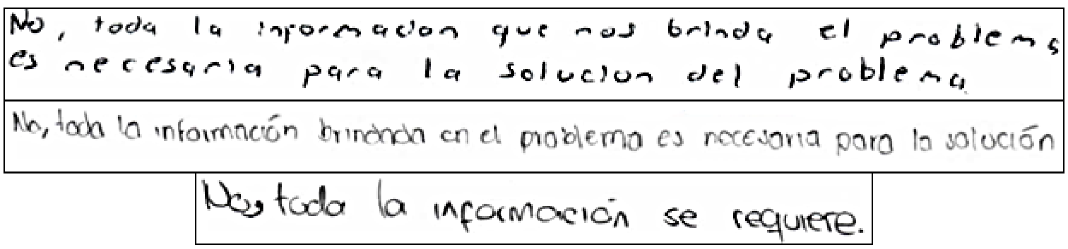


los datos que me dieron en el Problema fueron, dos puntos, el radio, la definición y la gráfica

(-2,3), el radio que equivale a 3, la circunferencia euclidea y definición

Imagen 31. Evidencia de respuesta completa de los estudiantes $(\boldsymbol{E_{14}}, \boldsymbol{E_{15}})$ ¿Cuáles son los datos del problema? Actividad 1

Para la pregunta ¿Cuáles son los datos que brinda el problema que no se requiere para la solución del mismo? Permite observar que los estudiantes comprendieron el problema. Los 15 estudiantes afirmaron que todos los datos dados son necesarios para resolverlo.



No, toda la informacion que nos brinda el problems es necesaria para la solucion del problema

No, toda la información brindada en el problema es necesaria para la solución

No, toda la información se requiere.

Imagen 32. Evidencia de respuesta completa de estudiantes que reconocen que todos los datos son necesarios. Actividad 1

Siguiendo con el análisis, se tiene el plan para solucionar el problema propuesto por los estudiantes

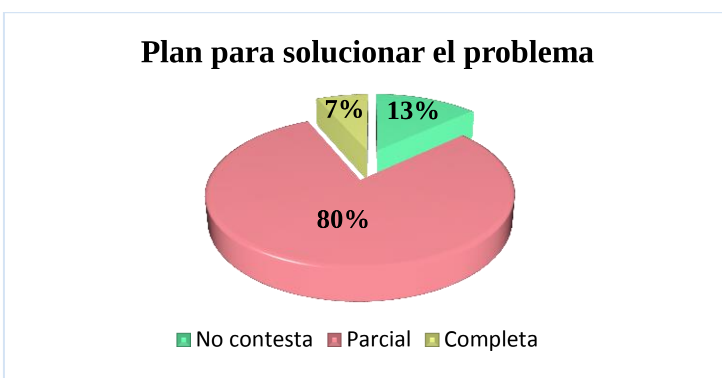
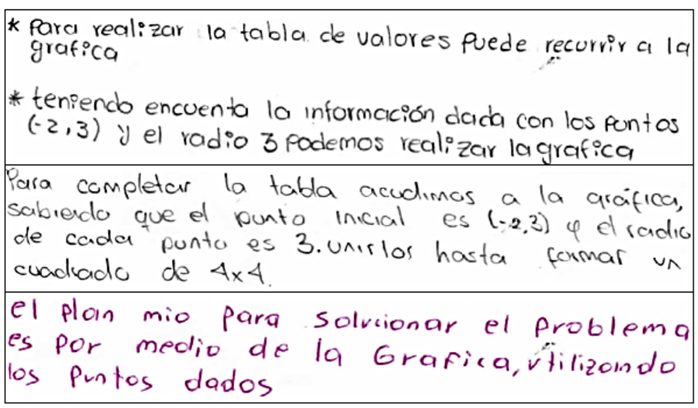


Figura 11. Plan para solucionar el problema. Actividad 1

Fuente: elaboración propia

La *figura 11* muestra que el 13 % de los estudiantes no escribieron el plan que le permitiera guiarse para la solución y son los estudiantes (E_9, E_{13}) que dejaron en blanco la hoja de respuesta, sin embargo, el 80% de los participantes plasmaron parcialmente ideas que les permitió solucionar cada ítem, pero no especificaron como encontrar las rectas que limitan la figura, por ejemplo los estudiantes (E_{10}, E_{11}, E_{14}), ver *imagen 33*, por otro lado el 7% escribió el plan de manera coherente y completo que lo llevó a solucionar cada ítem de manera exitosa, pero el estudiante $(E_7,)$ manifestó que a partir de la gráfica se elabora una tabla de valores y reconoció que se debe identificar puntos destacados; para encontrar las ecuaciones de las rectas que limitan el rombo. Ver *imagen 34.*


* Para realizar la tabla de valores puede recurrir a la grafica
* teniendo encuenta la información dada con los puntos (-2,3) y el radio 3 podemos realizar la grafica

Para completar la tabla acudimos a la gráfica, sabiendo que el punto inicial es (-2,3) y el radio de cada punto es 3. unirlos hasta formar un cuadrado de 4x4.

el plan mio para solucionar el problema es por medio de la Grafica, utilizando los puntos dados

Imagen 33. Evidencia de respuestas parciales de los estudiantes $(\boldsymbol{E_{10}}, \boldsymbol{E_{11}}, \boldsymbol{E_{14}})$. Escriba un plan para solucionar el problema. Actividad 1

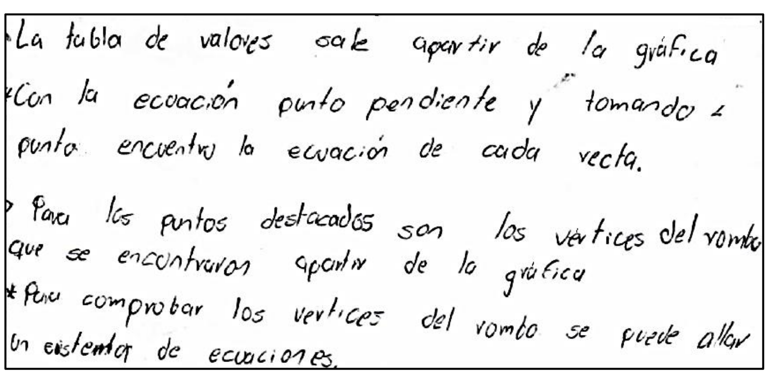
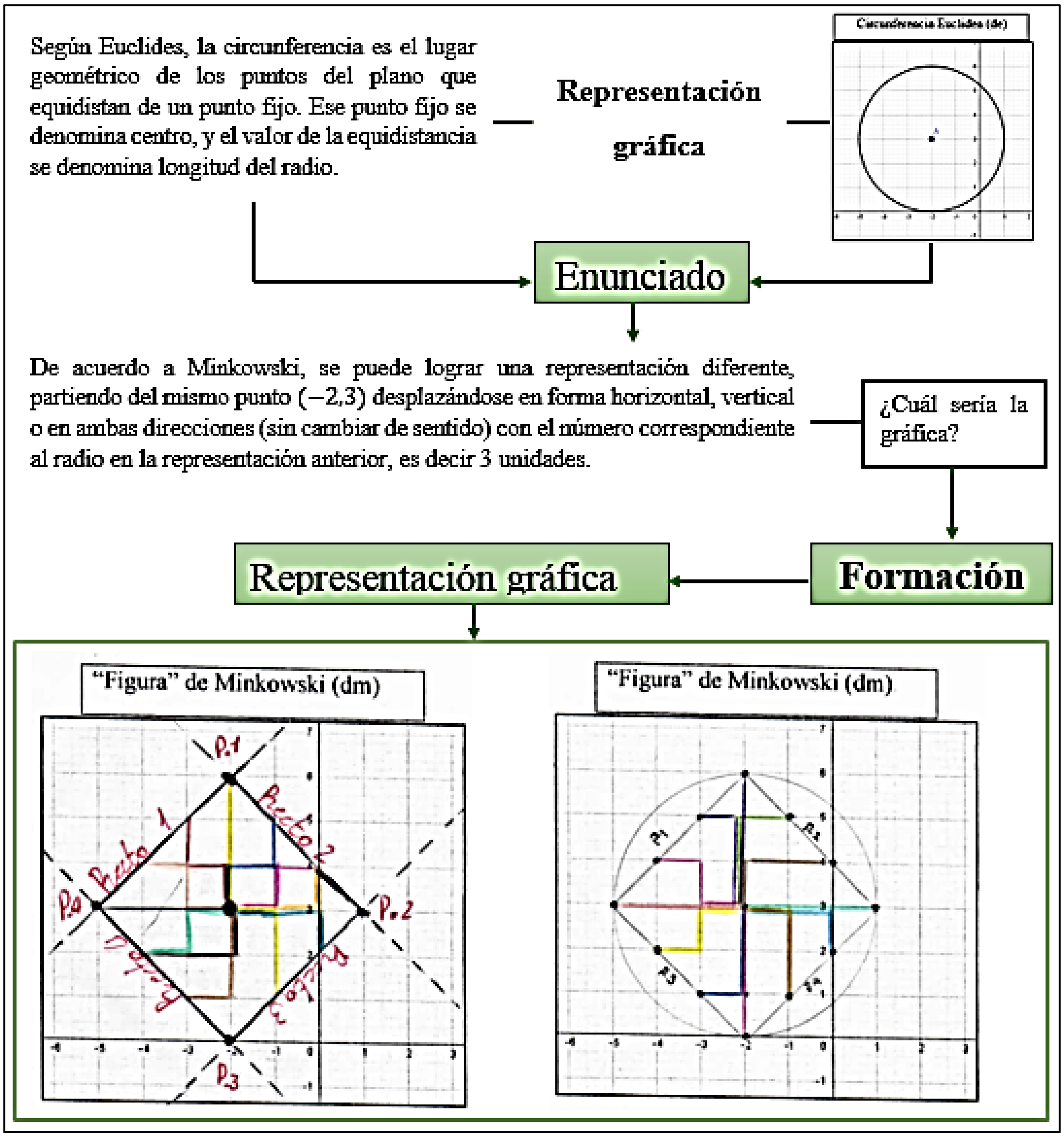

*La tabla de valores sale apartir de la gráfica
*Con la ecuación punto pendiente y tomando 2 punto encuentro la ecuación de cada recta.
* Para los puntos destacados son los vertices del rombo que se encontraron apartir de la gráfica
* Para comprobar los vertices del rombo se puede allar un sistema de ecuaciones.

Imagen 34. Evidencia de plan completo del estudiante (E_7) para la solución del problema. Actividad 1

Como un primer instante a la solución del problema, se analizó ¿cómo se logró la actividad cognitiva de *formación* como se tenía previsto? Los 15 estudiantes lograron realizar la figura de Minkowski, esto indicó que interpretaron la definición de circunferencia Euclidea y su gráfica, y el propuesto.



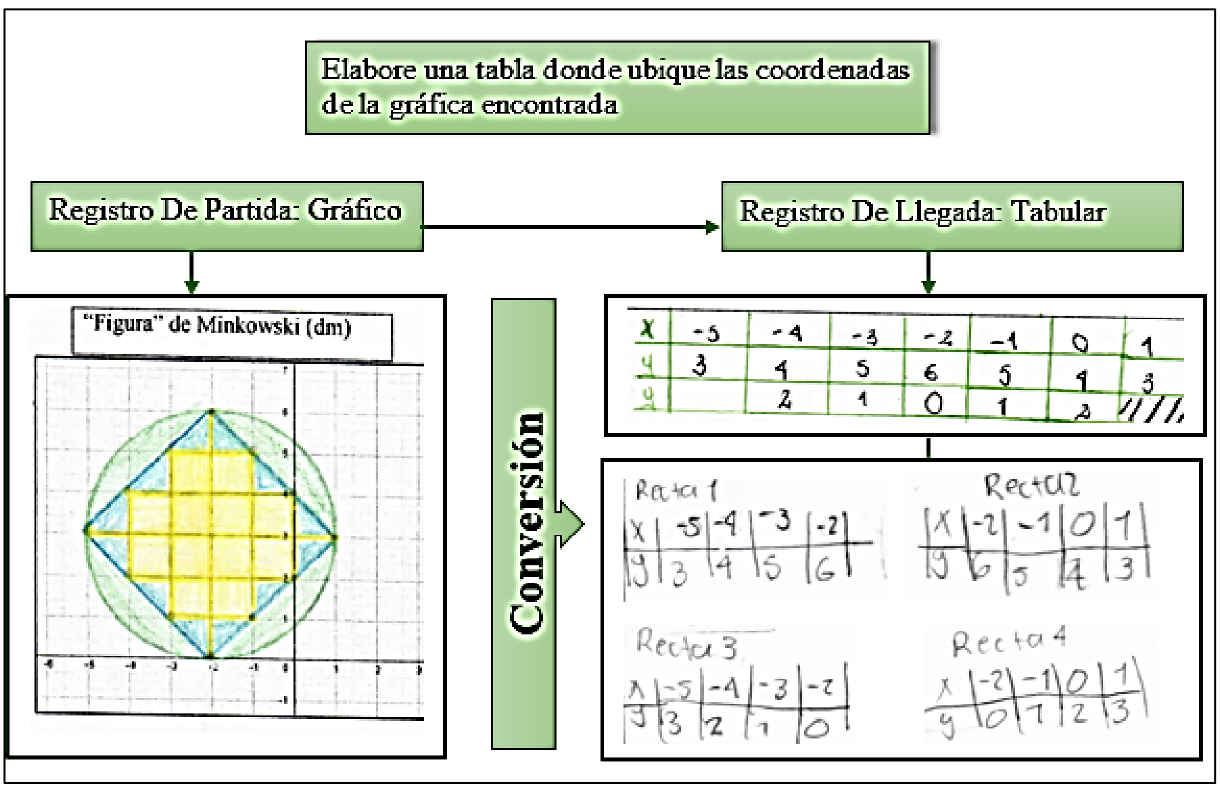
Esquema 1. Evidencia de la actividad cognitiva de formación en el registro gráfico. Actividad 1

Fuente: elaboración propia.

En el *esquema 1* se observa que los estudiantes utilizaron colores para realizar los recorridos tanto horizontales como verticales, para encontrar cada uno de los puntos que formarían la figura. Inicialmente se logró trasformar la definición de circunferencia y gráfica de Euclides, en la figura de Minkowski, teniendo en cuenta su métrica, es decir, lograron la actividad cognitiva de *formación* de los cuatro sistemas de ecuaciones lineales 2×2, a partir de una información.

Un segundo momento fue el análisis de la actividad cognitiva de *conversión* en cada ítem.

En el ítem *b* de pasar de la gráfica de Minkowski a una tabla de valores cada una de las coordenadas que formaban la figura, 13 de los estudiantes logran la *conversión* del registro gráfico al tabular, como por ejemplo la estudiante (E_2) realizó en una tabla todas las parejas ordenadas de la figura y por otro lado el estudiante (E_{12}) registró los pares ordenados en tablas diferentes. Se observó en la representación tabular, que en el plano cartesiano nombraron al eje de las abscisas con la letra *"X"* y con la letra *"Y"* al eje de las ordenadas, como se muestra en el siguiente esquema.



Esquema 2. Evidencia de conversión del registro gráfico a tabular de los estudiantes (E_2, E_{12}). Actividad 1

Fuente: elaboración propia.

Respecto a la pregunta del ítem *c)* ¿Cuáles puntos destacaría de la figura? 14 Estudiantes destacaron los cuatro vértices del rombo como puntos importantes. Tal es el caso de los estudiantes (E_3, E_{12}). Ver *imagen 36*

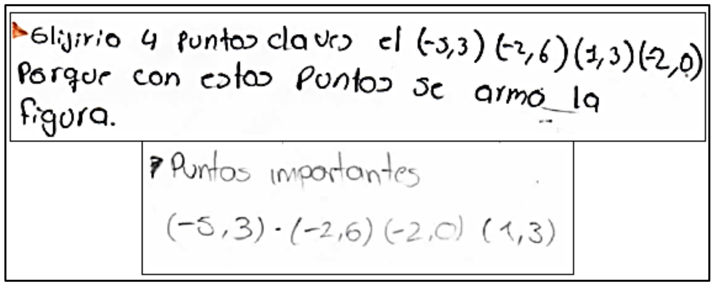


Imagen 35. Evidencia de puntos destacados de la figura de Minkoswki explícitamente de los estudiantes (E_3, E_{12}). Actividad 1

Por otro lado, la estudiante (E_{10}) destacaba todos los puntos que se utilizaron para construir la figura, incluido el punto centro de la circunferencia de Euclides. Ver *imagen 37*

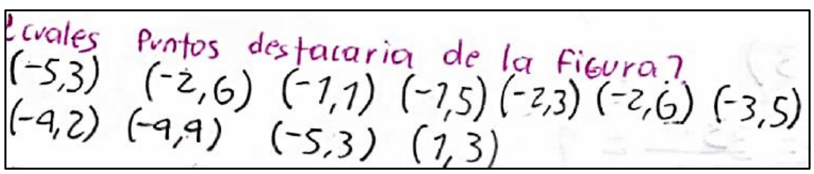


Imagen 36. Evidencia de puntos destacados de la figura de Minkoswki explícitamente de la estudiante (E_{10}). Actividad 1

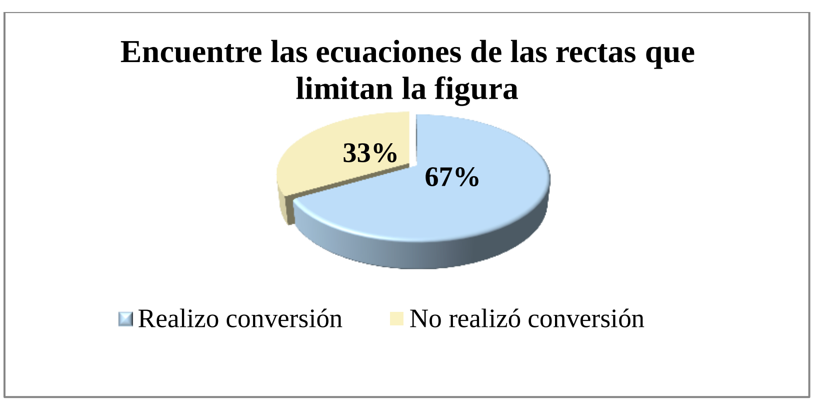
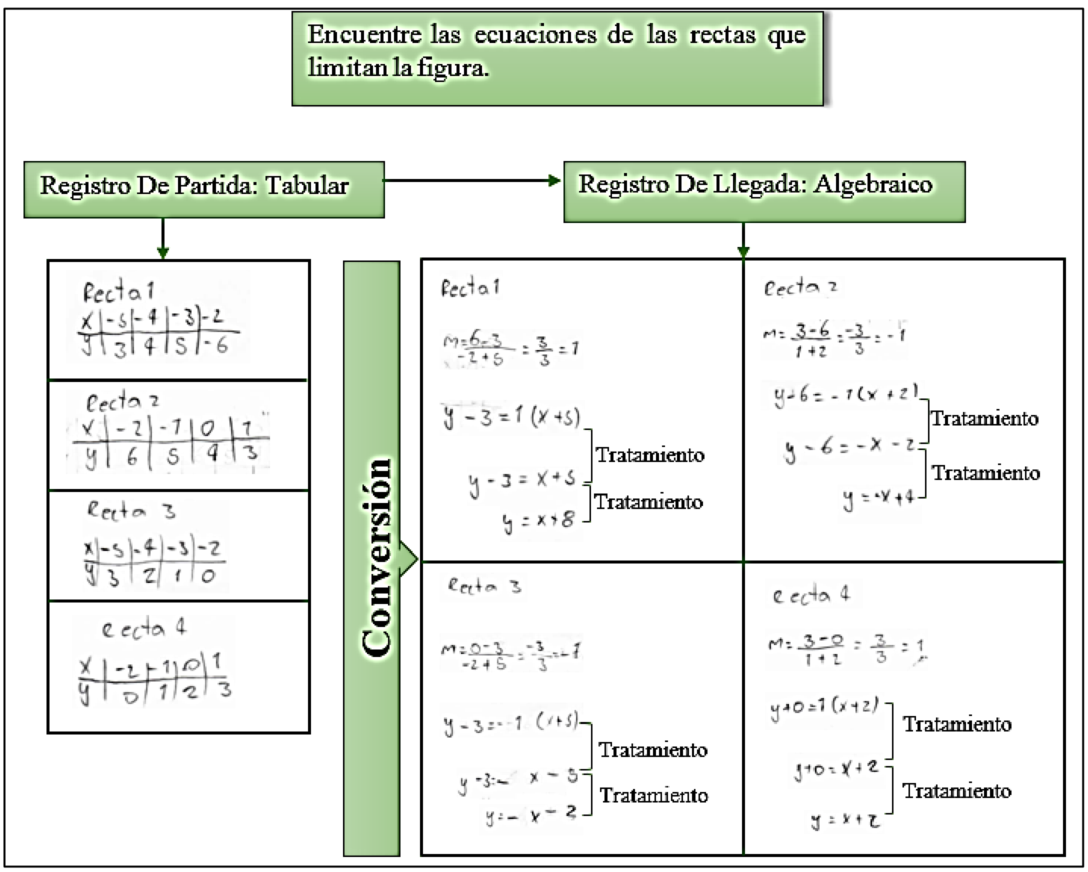


Figura 12. Actividad cognitiva de conversión del registro gráfico al algebraico. Actividad 1

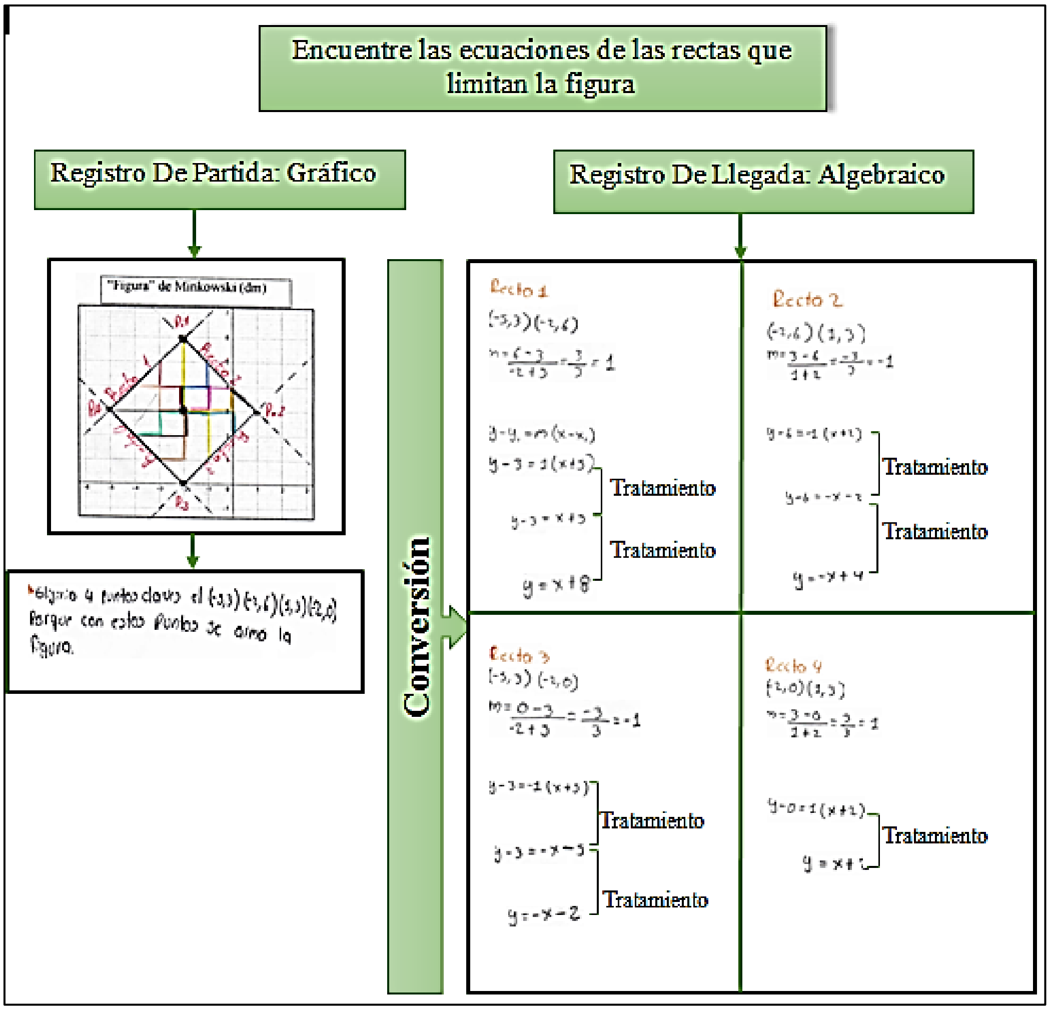
Fuente: elaboración propia.

En la *figura 12* muestra que el 67% de los estudiantes encontraron las expresiones algebraicas de las rectas que limitan la figura, se observó que algunos estudiantes utilizaron las tablas de valores y otros directamente desde la gráfica, es decir, se evidenció la *conversión* de dos maneras, la primera del registro tabular al registro algebraico, y la segunda del registro gráfico al algebraico, el porcentaje restante son los estudiantes que intentan realizar la *conversión* o dejan el espacio en blanco. Por ejemplo el estudiante (E_7), a partir de la tabla de valores de cada recta, tomó los pares ordenados (x_1, y_1) y (x_2, y_2) que le permitía hallar el valor de la pendiente de cada recta por medio de la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y utilizando la expresión punto pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$ se encontró cada una de las rectas, como se muestra el siguiente esquema.



Esquema 3.Evidencia de conversión del registro tabular al algebraico del estudiante (E_7). Actividad 1
Fuente: elaboración propia.

Por último, el estudiante (E_3) realizó la *conversión* de gráfico al algebraico de manera correcta. Inicialmente etiqueto a los cuatro vértices del rombo como P1, P2, P3, P4 siendo cada punto un par ordenado, enumeró las rectas. Esto mostró que el estudiante manejó sin dificultad la *conversión*. Véase *esquema 4.*



Esquema 4. Conversión del registro gráfico al algebraico Respuesta del estudiante (E_3). Actividad 1
Fuente: elaboración propia.

En el registro algebraico se observó la actividad de *tratamiento* que se hizo a cada ecuación, dejando expresada cada una de las ecuaciones en forma explícita.

Respecto a las preguntas planteadas para reconocer si estudiantes examinan la solución se tiene:

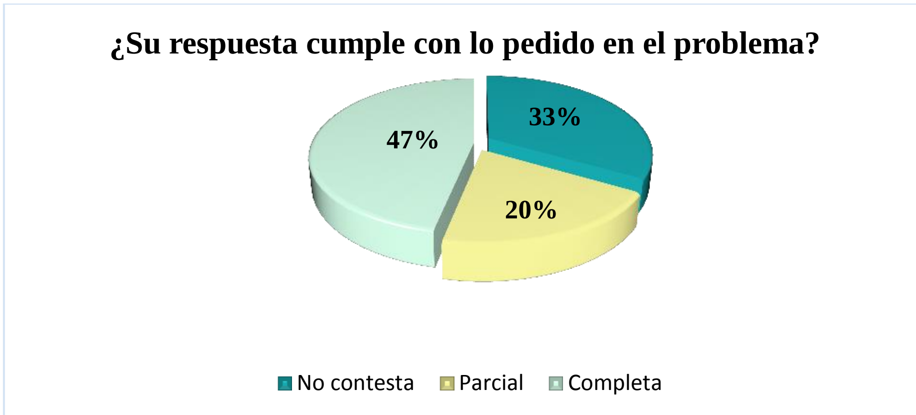


Figura 13. ¿Su respuesta cumple con lo pedido en el problema? Actividad 1

Fuente: elaboración propia

La *figura 13* muestra que el 33% de los estudiantes no contestaron dejando el espacio en blanco, por otro lado el 20% respondieron parcialmente, por ejemplo los (E_{13}, E_{14}) no escriben sus resultados, mientras que el 47% de los estudiantes dieron la respuesta completa, especificando que realizaron la gráfica y destacaron los puntos, al igual que hallaron las ecuaciones que limitan la figura de Minkoswki; tal es el caso de los estudiantes $(E_1, E_2, E_3, E_4, E_8, E_{11}, E_{12})$.

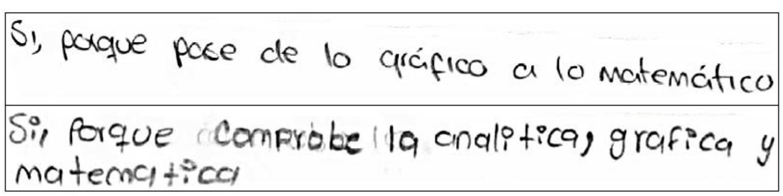


Imagen 37. Evidencia de respuestas parciales de los estudiantes (E_{13}, E_{14}) ¿Qué le pide el problema? Actividad 1.

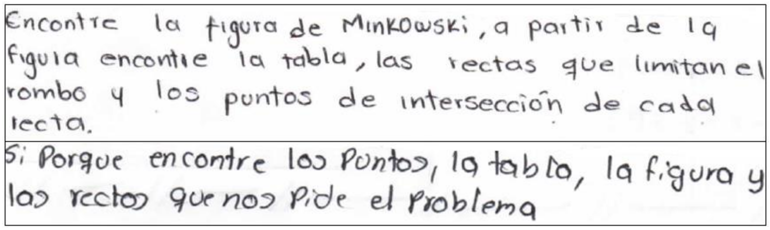


Imagen 38. Evidencia de respuestas completas de los estudiantes (E_1, E_2) ¿Qué le pide el problema? Actividad 1

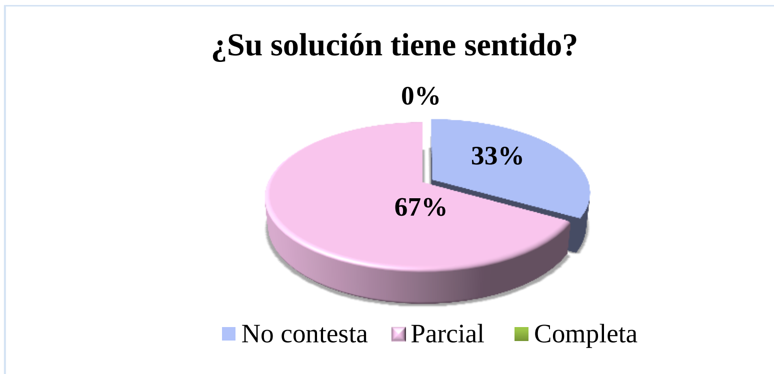


Figura 14. ¿Su solución tiene sentido? Actividad 1

Fuente: elaboración propia.

La *figura 14* evidencia que el 67% respondió parcialmente reconociendo que a partir del registro gráfico se puede solucionar el problema, como es el caso de los estudiantes $(E_{6,}, E_9)$ Ver *imagen 40* y el porcentaje restante no contesta.

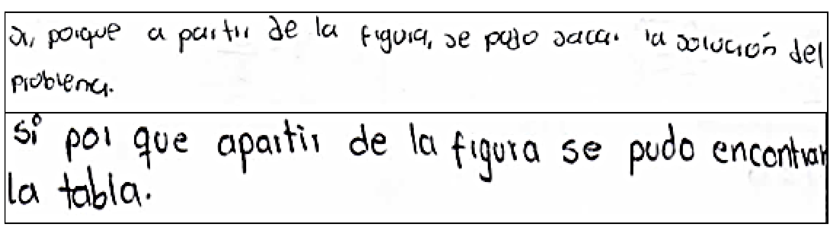


Imagen 39. Evidencia de respuestas parciales de los estudiantes (E_6, E_9) ¿Su solución tiene sentido? Actividad 1

Al examinar la solución obtenida se evidenció la relación entre los registros gráfico y algebraico para presentar otra posible solución del ítem *b* de la actividad.

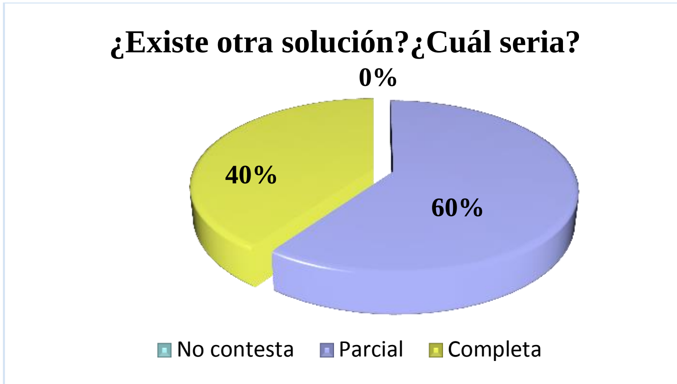
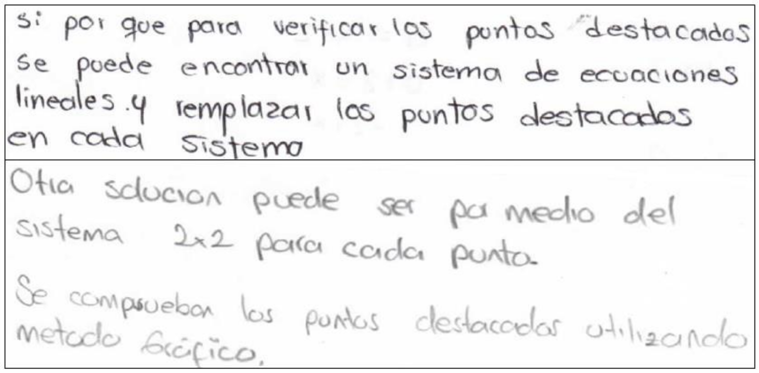


Figura 15. ¿Existe otra solución? ¿Cuál sería? Actividad 1

Fuente: elaboración propia

Todos los estudiantes dieron respuesta a la pregunta, donde el 60% de los estudiantes contestaron parcialmente, ver *figura 15* por ejemplo los (E_7, E_{10}) mencionaron que para comprobar los vértices del rombo se plantean sistemas de ecuaciones conformado en el registro algebraico por rectas que se intersectan en el registro gráfico, luego, reemplazar la coordenada de intersección en el sistema verificando que lo satisface. En definitiva, reconocieron el método gráfico como solución a un sistema de ecuaciones lineales $2 \; x \; 2$. Véase *imagen 41*. Por último, en *figura 15* el 40% de los estudiantes respondieron completamente porque propusieron encontrar los vértices del rombo utilizando algún método para solucionar un sistema de ecuaciones, por ejemplo el estudiante (E_1) escribió que existen los métodos algebraicos, como: igualación, sustitución, reducción y determinantes para verificar los vértices del rombo e intentó buscar la solución en el registro algebraico, utilizando el método de eliminación encontró el primer punto destacado de la figura $(-2,6)$. Véase *imagen 40*.

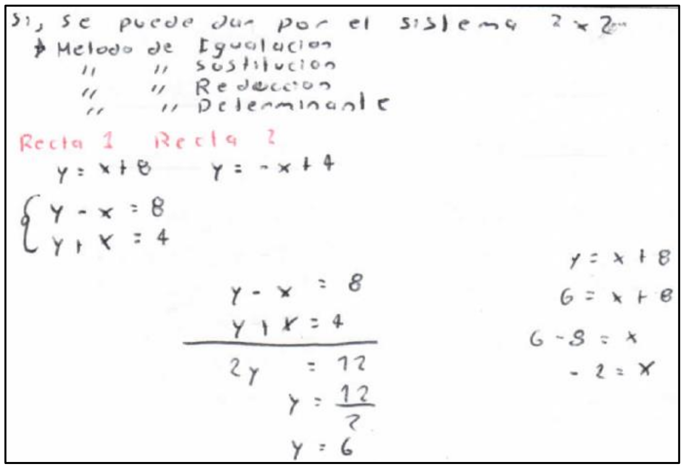


si porque para verificar los puntos destacados se puede encontrar un sistema de ecuaciones lineales y remplazar los puntos destacados en cada sistema

Otra solucion puede ser por medio del sistema 2x2 para cada punto.

Se comprueban los puntos destacados utilizando metodo gráfico.

Imagen 40. Evidencia de respuestas parciales de los estudiantes (E_7, E_{10}) ¿Existe otra solución? Actividad 1



Si, se puede dar por el sistema 2 x 2

Metodo de Igualacion
" " sustitucion
" " Reduccion
" " Determinante

Recta 1 Recta 2

$y = x + 8$ $y = -x + 4$

$$\begin{cases} y - x = 8 \\ y + x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} y - x = 8 \\ y + x = 4 \\ \hline 2y = 12 \end{array}$$

$y = \frac{12}{2}$

$y = 6$

$y = x + 8$

$6 = x + 8$

$6 - 8 = x$

$-2 = x$

Imagen 41. Evidencia de reconocimiento de los métodos algebraicos para solucionar un sistema de ecuaciones lineales 2 x 2. Respuesta del estudiante (E_1). Actividad 1

El estudiante (E_3) verificó los puntos vértices del rombo como puntos destacados en la figura, planteó cuatro sistemas de ecuaciones lineales 2×2 en el registro algebraico; cada sistema estaba compuesto por rectas que se intersectaban. Utilizó el método algebraico de eliminación para hallar el valor de la variable *"y"* y luego reemplazó este valor en otra ecuación, hallando el valor de la variable *"x";* mediante este proceso verificó que son los mismos puntos encontrados en la gráfica. De esta manera el estudiante logró evidenciar la relación del registro gráfico con el algebraico. Véase *imagen 42.*

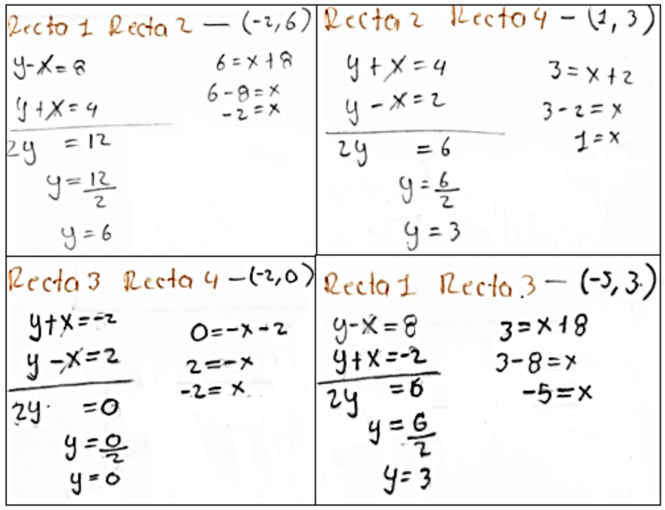


Imagen 42. Evidencia de respuesta completa del estudiante (E_3) en registro algebraico. Actividad 1.

Respecto a las actividades cognitivas en esta primera actividad se evidenció la actividad *formación* en el registro gráfico, cuando los estudiantes reconocen sistemas de ecuaciones lineales 2×2 con única solución de la gráfica de Minkonski; en la *conversión* del registro gráfico al tabular, se observó que los relacionan perfectamente porque manifestaron que para realizar la tabla de valores se debe recurrir a la gráfica; en la *conversión* del registro tabular al algebraico y del gráfico al algebraico, se demostró en el momento que plantean las rectas que limitan la figura.

Lograron identificar el objeto matemático de estudio, cuando responden a las preguntas ¿Existe otra solución? ¿Cuál sería? relacionando el registro gráfico con el algebraico, además, reconocen el método gráfico para solucionar un sistema de ecuaciones pero no lo utilizan.

Actividad 2

Durante la aplicación de la actividad en la experimentación surgió una categoría y es la tendencia de ubicación del rectángulo en el plano cartesiano.

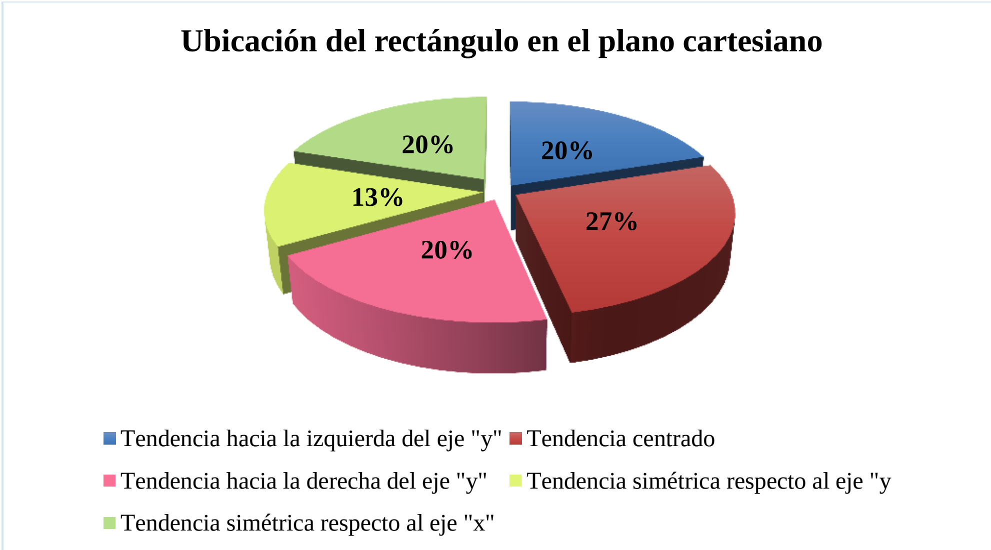


Figura 16. Ubicación del rectángulo en el plano cartesiano. Actividad 2

Fuente: elaboración propia

La figura anterior muestra que el 20% de los estudiantes graficaron el rectángulo en el plano cartesiano con tendencia hacia la izquierda hacia la izquierda del eje "Y" y son los estudiantes (E_2, E_7, E_{10}), dentro de la tendencia antes mencionada el estudiante (E_{10}) ubicó el rectángulo en el cuadrante II del plano cartesiano. *Ver imagen 44.*

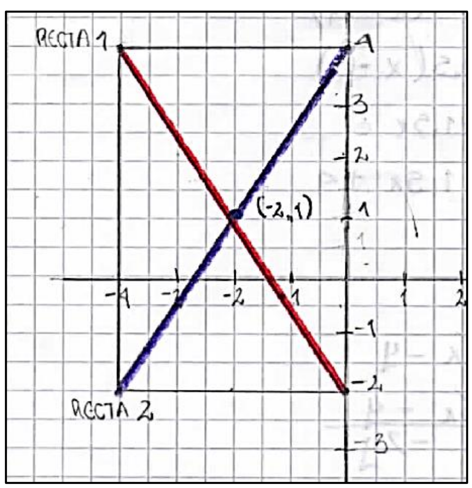


Imagen 43. Evidencia de ubicación del rectángulo, con tendencia hacia la izquierda Respuesta del estudiante (E_2). Actividad 2

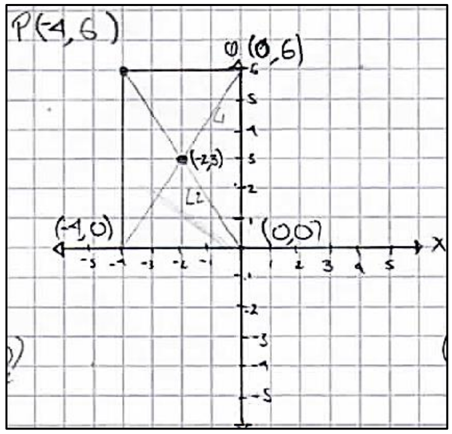


Imagen 44. Evidencia de ubicación del rectángulo, con tendencia hacia la izquierda del eje "Y" en el cuadrante II. Respuesta del estudiante (E_{10}). Actividad 2

La *figura 16* también muestra que el 20% de los estudiantes graficaron el rectángulo en el plano cartesiano con tendencia hacia la derecha del eje *"Y"*, lo ubicaron en el cuadrante I del plano cartesiano y son los (E_3, E_{13}, E_{14}).

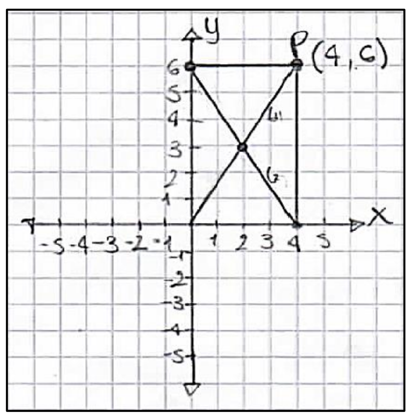


Imagen 45. Evidencia de ubicación del rectángulo, con tendencia hacia la derecha del eje "Y" Respuesta del estudiante (E_{13}). Actividad 2

Respecto a la ubicación del rectángulo con tendencia simétrico respecto al eje *"X"* del plano cartesiano, se observó que los estudiantes (E_4, E_{11}) tienen relación con la tendencia anterior, en el sentido que también graficaron el rectángulo a la derecha del eje *"Y"*, (ver *imagen 47*) sin embargo, pertenecieron al 20% de los estudiantes que grafican el rectángulo en el plano cartesiano simétrico al eje *"X"*; dentro de este porcentaje se incluyó el estudiante (E_6).

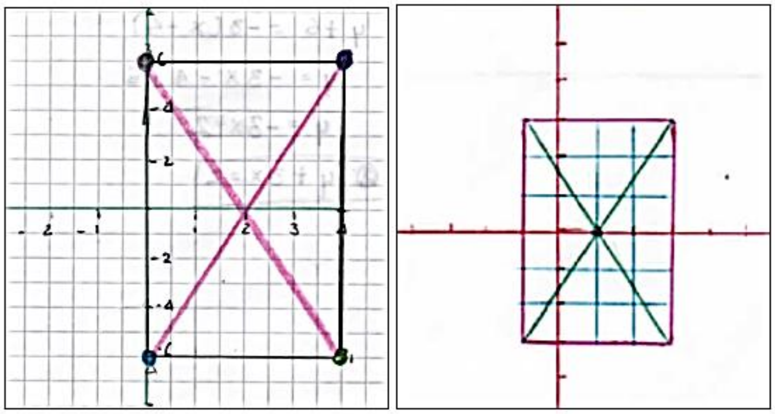


Imagen 46. Evidencia de ubicación del rectángulo, con tendencia simétrico respecto al eje *"X"*. Respuesta de los estudiantes (E_4, E_6). Actividad 2

Los (E_{12}, E_{15}) representaron al 13% de los estudiantes que graficaron el rectángulo en el plano cartesiano simétrico hacia el eje *"Y"*, se resalta que el estudiante (E_{12}) indica en la gráfica que las dimensiones del rectángulo son 4 y 6 unidades respectivamente.

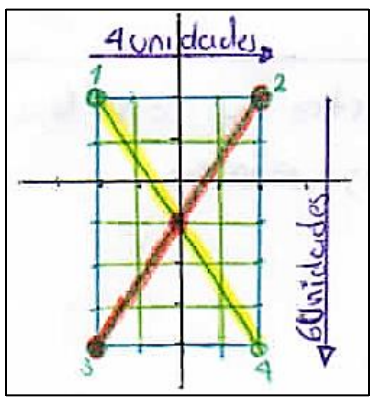


Imagen 47. Evidencia de ubicación del rectángulo, simétrico hacia el eje "Y". Respuesta del estudiante (E_{12}) Actividad 2

Por último, la *figura 16* muestra el 27% de los estudiantes graficaron el rectángulo con centro en el origen del plano cartesiano y son los (E_1, E_5, E_8, E_9), donde se observó que es el mayor porcentaje al graficar en esa tendencia.

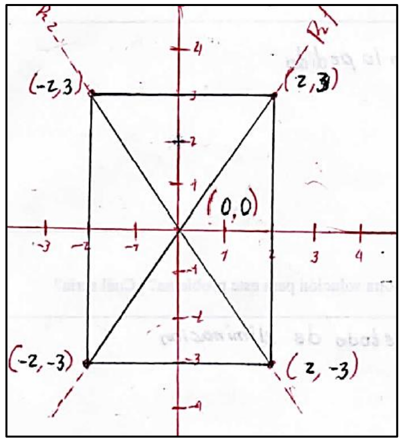
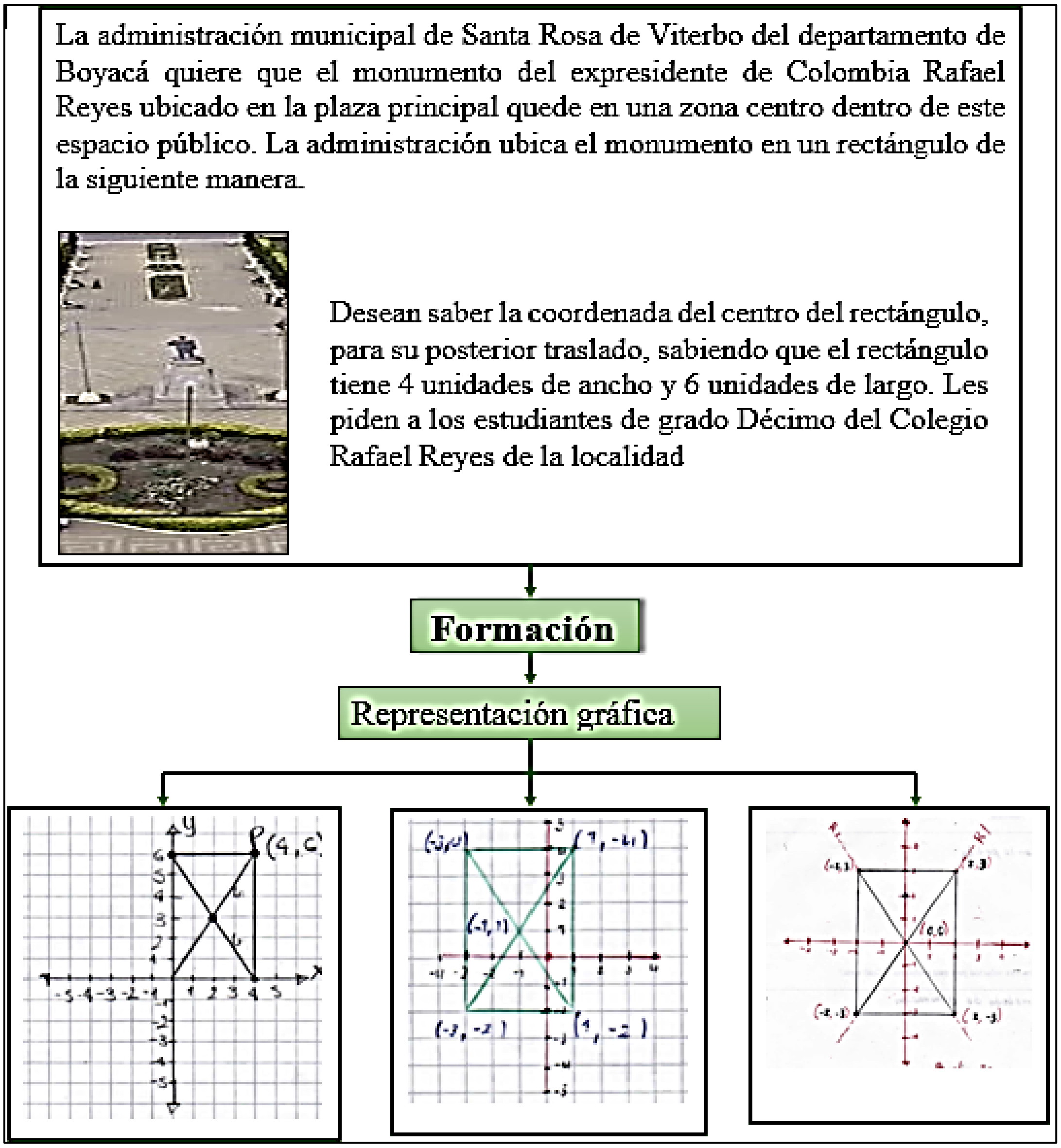


Imagen 48. Evidencia de ubicación del rectángulo con centro en el origen del plano cartesiano. Respuesta del estudiante (E_5). Actividad 2

Por lo anterior se evidencia que lograron la actividad cognitiva de *formación* a partir de una información como se muestra a continuación.



Esquema 5. Evidencia de actividad cognitiva de formación en el registro gráfico. Actividad 2

Fuente: elaboración propia.

A partir de este *esquema 5* se analizaron las preguntas orientadoras respecto a la comprensión del problema

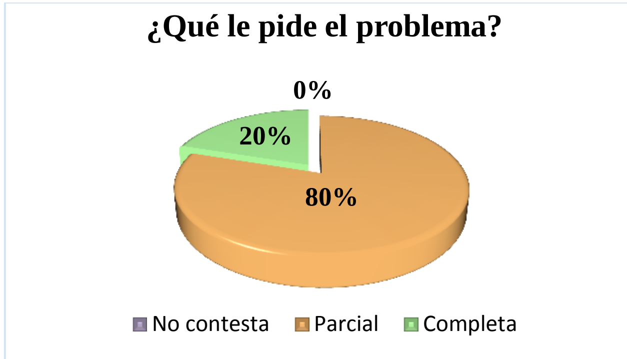


Figura 17. ¿Qué le pide el problema? Actividad 2

Fuente: elaboración propia.

La figura anterior muestra que el 80% de los estudiantes respondieron parcialmente; y el porcentaje restante respondió completamente, por ejemplo la estudiante (E_2) desconoció que se debe determinar las coordenadas de los vértices del rectángulo y comprobar que la coordenada central del rectángulo es la correcta, mientras que el estudiante (E_{14}) reconoció que se deben hallar coordenadas y comprobarlas, esto indicó que identificó completamente lo que pide el problema.

Imagen 49. Evidencia de respuesta parcial del estudiante (E_2) ¿Qué le pide el problema? Actividad 2

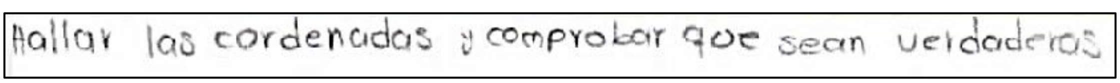


Imagen 50. Evidencia de respuesta completa del estudiante (E_{14})¿Qué le pide el problema? Actividad 2

Respecto a la pregunta ¿Cuáles son los datos del problema? Se observó que todos los estudiantes respondieron parcialmente en el sentido de las medidas del rectángulo, 4 unidades de ancho y 6 de largo, desconociendo la ubicación del monumento en el rectángulo, tal es el caso del estudiante (E_6).

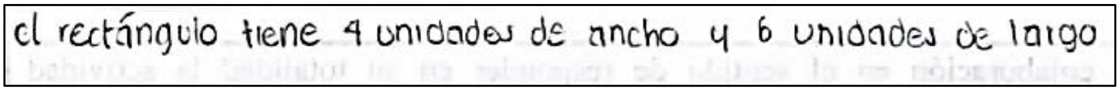

el rectángulo tiene 4 unidades de ancho y 6 unidades de largo

Imagen 51. Evidencia de respuesta parcial del estudiante (E_6). ¿Cuáles son los datos del problema? Actividad 2

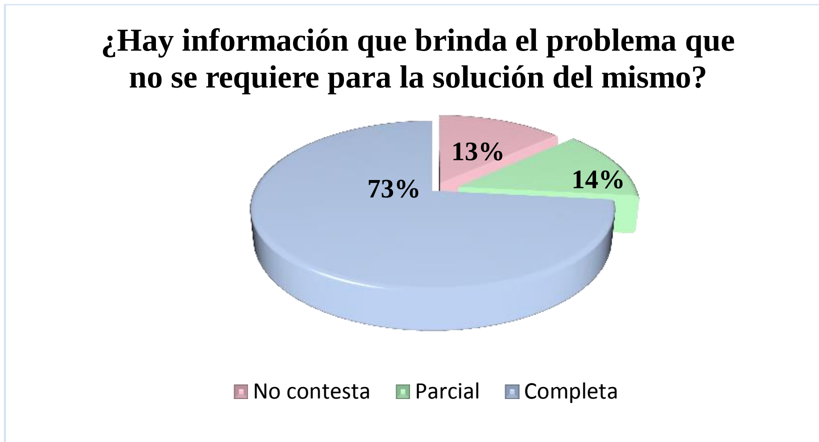


Figura 18. ¿Hay información que brinda el problema que no se requiere para la solución del mismo? Actividad 2

Fuente: elaboración propia.

En la *figura 18*, el 13% de los estudiantes no contestaron la pregunta dejando el espacio en blanco; el 14% la contesta parcial porque respondió de manera general (no), y son los estudiantes (E_5, E_6). El porcentaje restante respondió de manera completa especificando que toda la información que brinda el problema es necesaria para su solución, como por ejemplo el (E_3).

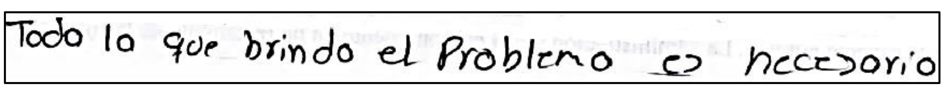
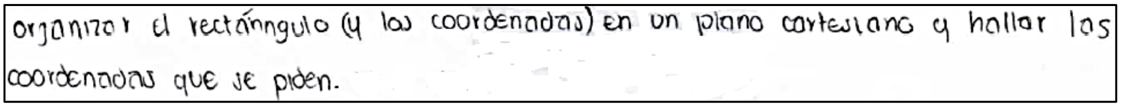

Todo lo que brinda el Problema es necesario

Imagen 52. Evidencia de respuesta completa del estudiante (E_3). ¿Hay información que brinda el problema que se requiere para la solución del mismo? Actividad 2

Al momento de concebir un plan para solucionar el problema, todos los estudiantes escribieron de manera parcial el plan, no especificaron los siguientes pasos (dibujar el rectángulo en el plano cartesiano para dar las coordenadas; forma para encontrar la coordenada del centro; y comprobar dicha coordenada central), tampoco escribieron el método para solucionar un sistema de ecuaciones lineales $2\ x\ 2$, tal es el caso de (E_6).



organizar el rectánngulo (y las coordenadas) en un plano cartesiano y hallar las coordenadas que se piden.

Imagen 53. Evidencia de diseño parcial de un plan para solucionar el problema. Respuesta del estudiante (E_6). Actividad 2

En el paso de solucionar el problema, se observó que todos los estudiantes graficaron el rectángulo como se evidenció en el análisis en la categoría emergente.

En el ítem a, cada estudiante graficó de manera diferente el rectángulo en el plano cartesiano; se evidenció variedad de coordenadas donde 14 de los estudiantes las indicaron como parejas ordenadas (x, y), tal es el caso de los estudiantes (E_3, E_9), sin embargo, el estudiante (E_{12}) realizó una tabla de valores para mostrar las coordenadas del rectángulo.

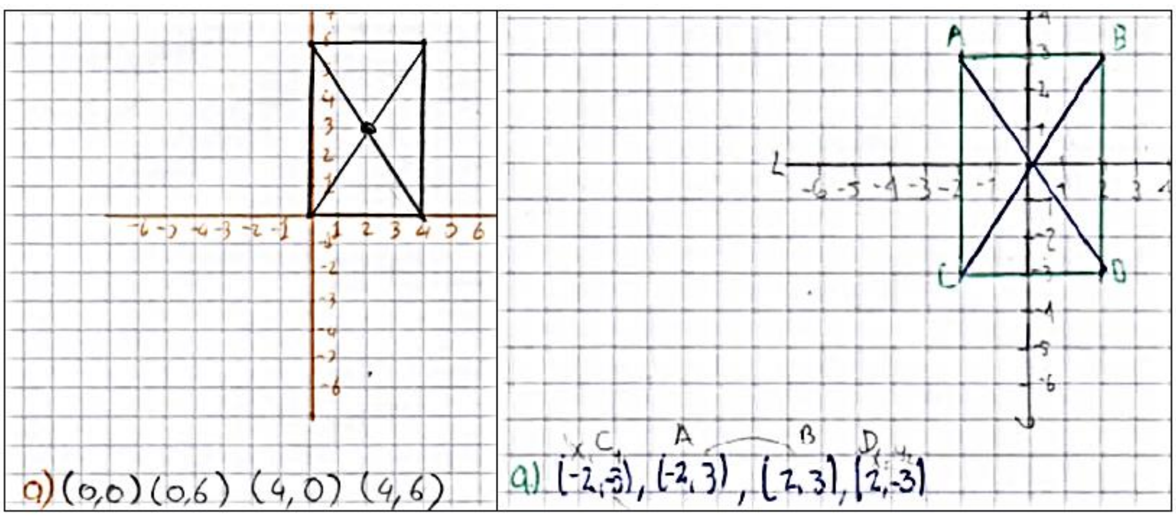


Imagen 54. Evidencia indicando coordenadas del rectángulo en parejas ordenadas. Respuesta de los estudiantes (E_3, E_9).Actividad 2

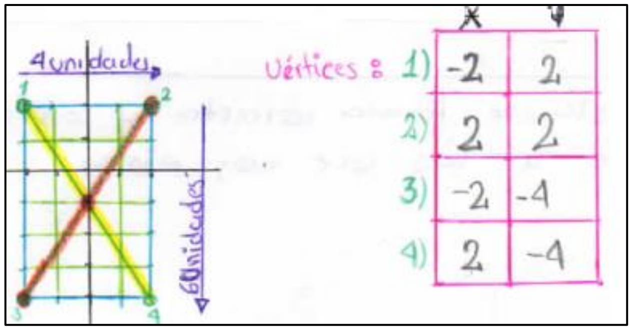


Imagen 55. Presentación de las coordenadas del rectángulo de manera tabular. Respuesta del estudiante (E_{12}). Actividad 2.

El ítem b consistía en encontrar la coordenada central del rectángulo donde se debía ubicar el monumento, se observó que todos los estudiantes la encontraron acudiendo a trazar las diagonales en el rectángulo e identificando el punto de intersección, realizando una lectura geométrica.

En el ítem c, era comprobar la coordenada central del rectángulo, como primer aspecto 14 estudiantes recurrieron a plantear el sistema en el registro algebraico, evidenciándose la *conversión* del registro gráfico al algebraico, por ejemplo la estudiante (E_{10}), para encontrar las ecuaciones de las rectas diagonales, utilizó la expresión de la pendiente de la recta $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y la punto pendiente $y - y_1 = m\,(x - x_1)$, con las coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) por donde realizó el trazo de la diagonal. Finalmente planteó un sistema de ecuaciones lineales 2×2.

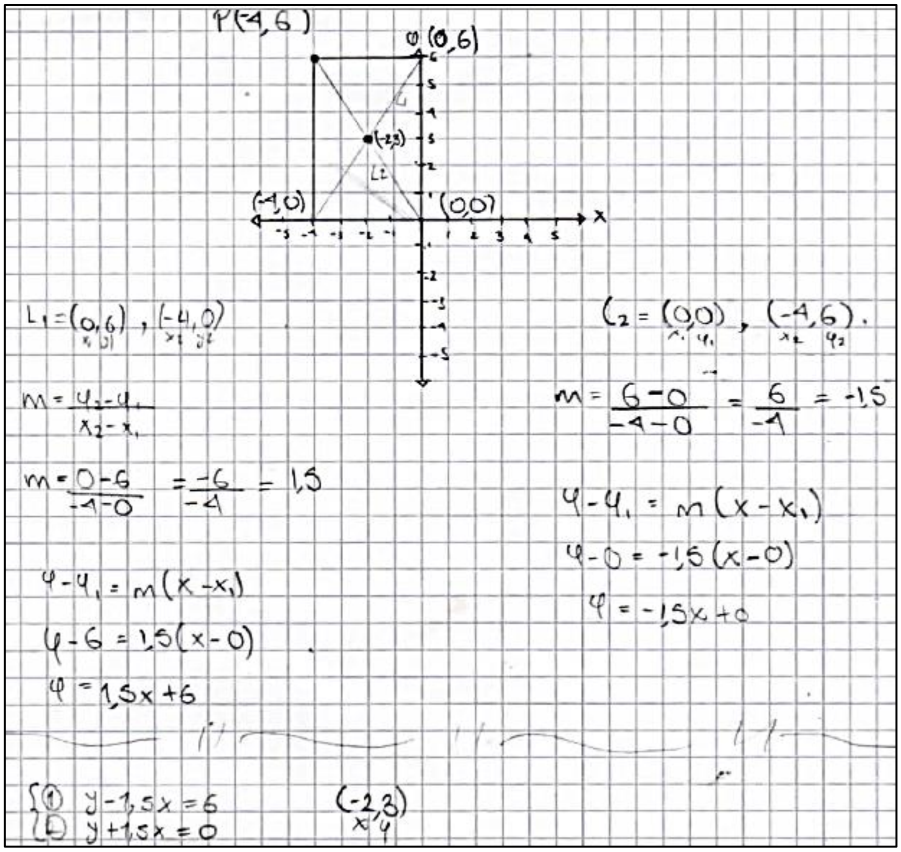


Imagen 56. Evidencia de conversión del registro gráfico al algebraico. Respuesta de la estudiante (E_{10})

Actividad 2

Como segundo aspecto, se analizó el método que el estudiante utilizó para la comprobación de la coordenada central del rectángulo en la cual se debe ubicar el monumento.

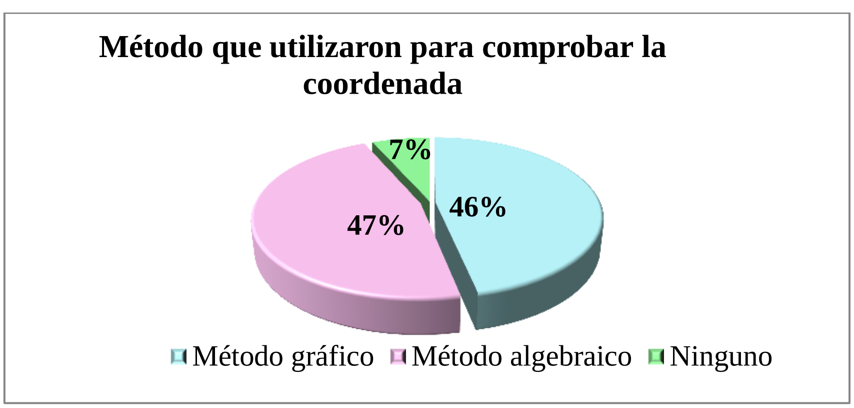


Figura 19. Método que utilizaron para comprobar la coordenada. Actividad 2

Fuente: elaboración propia.

De los 14 estudiantes que realizaron la *conversión* del registro gráfico al algebraico, la *figura 19* muestra que el 46% reconocieron que la intersección entre las rectas es la solución a un sistema de ecuaciones lineales 2×2, es decir, utilizaron método gráfico para comprobar la coordenada central del rectángulo. Como por ejemplo, la estudiante (E_{14}) después de plantear el sistema de ecuaciones reemplazó la coordenada (x, y) en el sistema y verificó que se cumple las igualdades, desde luego, se observó que la *conversión* del registro gráfico al algebraico está correcta, relacionando perfectamente estos dos registros.

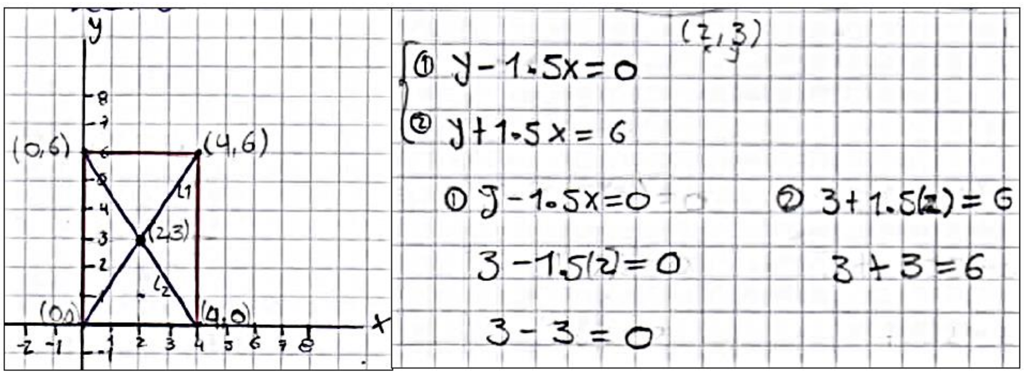


Imagen 57. Evidencia de comprobación de la coordenada central del rectángulo utilizando método gráfico. Respuesta de la estudiante (E_{14}) Actividad 2

Por otro lado, la *figura 19* muestra que el 47% de los estudiantes utilizaron algún método algebraico para solucionar el sistema de ecuaciones y de esta manera verificaron la coordenada central. Por ejemplo, el estudiante (E_3) utilizó el método de eliminación, primero hace la actividad de *tratamiento* a cada una de las ecuaciones del sistema, después, eliminó la variable *"x"* y encontró el valor de la variable *"y"* y reemplazó dicho valor en alguna de las ecuaciones del sistema encontrando el valor de *"x"*.

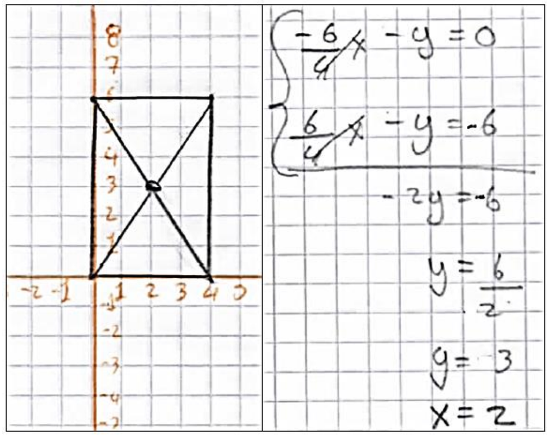


Imagen 58. Evidencia comprobación de la coordenada central del rectángulo utilizando método algebraico. Respuesta del estudiante (E_3). Actividad 2

En el cuarto paso se plantearon tres preguntas que permitieron confirmar si el estudiante está en la capacidad de examinar la solución al problema.

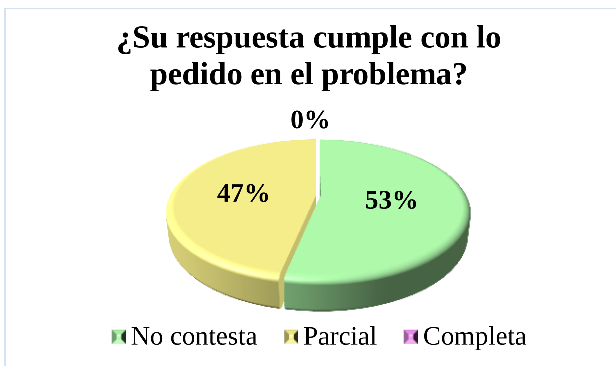


Figura 20. ¿Su respuesta cumple con lo pedido en el problema? Actividad 2

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo a la figura anterior se observó que el 53% de los estudiantes no contesta la pregunta, esto muestra la baja capacidad que tienen los estudiantes al momento de revisar si todos los procedimientos realizados son correctos. Sin embargo el 47% responde de manera parcial como es el caso de la estudiante (E_{13}), que argumentó que el problema solo era hallar coordenadas del rectángulo y la central del mismo en el plano cartesiano, no realizó una revisión a detalle en el sentido de analizar los algoritmos en el método algebraico utilizado para comprobar la respuesta.

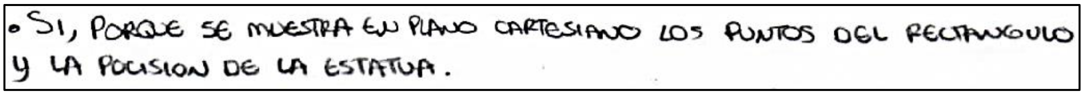

• SI, PORQUE SE MUESTRA EN PLANO CARTESIANO LOS PUNTOS DEL RECTANGULO Y LA POCISION DE LA ESTATUA.

Imagen 59. Evidencia de respuesta parcial de la estudiante (E_{13}), ¿La solución tiene sentido? Actividad 2

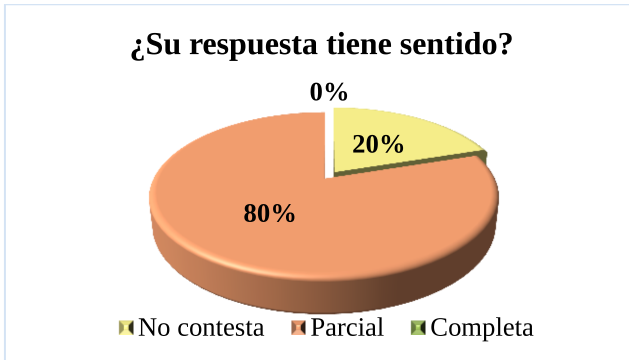


Figura 21. ¿Su respuesta tiene sentido? Actividad 2

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo a la figura anterior el 80% de los estudiantes respondieron de manera parcial, es decir, superficialmente, además, no justificaron sus respuestas, por ejemplo el estudiante (E_3) no realizó un análisis comparativo respecto a la coordenada que se encontró en la gráfica y la que halló cuando utilizó el método de eliminación, para concluir que es la misma coordenada. El porcentaje restante no responde la pregunta planteada.

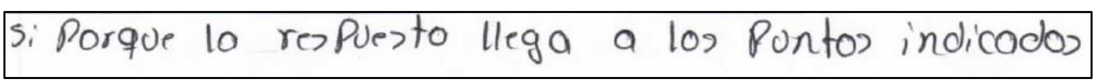

si Porque la respuesta llega a los Puntos indicados

Imagen 60. Evidencia de respuesta parcial del estudiante (E_3). ¿Su solución tiene sentido? Actividad 2

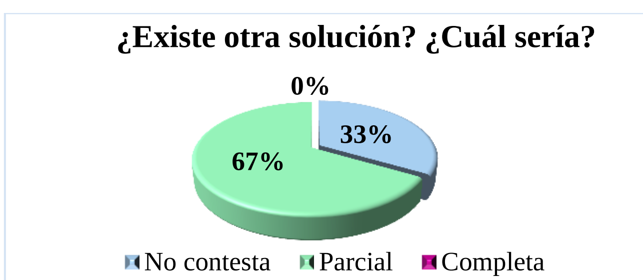


Figura 22. ¿Existe otra solución? ¿Cuál sería? Actividad 2

Fuente: elaboración propia.

En la figura anterior se muestra que el 67% de los estudiantes respondieron de manera parcial. Por ejemplo, el estudiante (E_3) reconoce que existen otros métodos de solución a un sistema de ecuaciones para verificar la coordenada central del rectángulo y la estudiante (E_{10}) propone que, para encontrar de manera gráfica la coordenada central es necesario trazar rectas perpendiculares que pasen por los puntos medios de los lados del rectángulo.

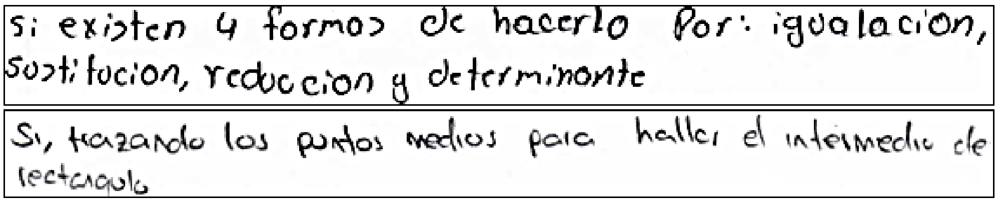


Imagen 61. Evidencia de respuesta parcial de los estudiantes (E_3, E_{10}).¿Existe otra solución? ¿Cuál sería?

Actividad 2

En esta actividad el 47% de estudiantes evidenciaron que las rectas diagonales del rectángulo se relacionan con la representación gráfica de un sistema ecuaciones lineales 2×2, y allí reconocieron la solución a un sistema como la intersección entre estas rectas. El 46% de los estudiantes utilizó algún método algebraico para solucionar el sistema.

Actividad 3

Se analizaron las tres preguntas orientadoras ¿Qué le pide el problema? ¿Cuáles datos le da el problema? ¿Hay información que brinda el problema que no se requiere para la solución del mismo?

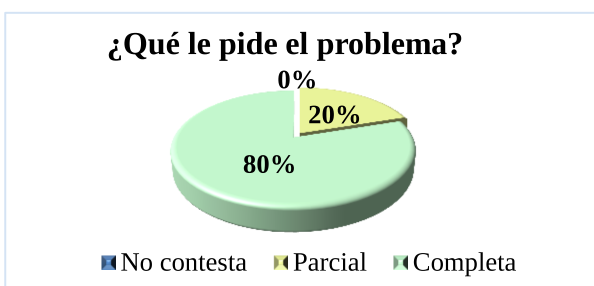


Figura 23. ¿Qué le pide el problema? Actividad 3

Fuente: elaboración propia.

La *figura 23* muestra que un 20% de los estudiantes identificaron las dimensiones que solicita el problema, pero no especificaron que tipo de dimensiones, tal es el caso de los estudiantes (E_5, E_{10}). El porcentaje restante respondió de manera completa, reconociendo que son las dimensiones de un rectángulo, es decir, el largo y el ancho. Por ejemplo, los estudiantes (E_{12}, E_2, E_4).

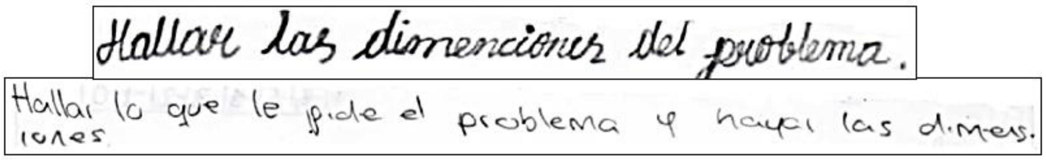


Imagen 62 . Evidencia de respuesta parcial de los estudiantes (E_5, E_{10}) ¿Qué le pide el problema? Actividad 3.

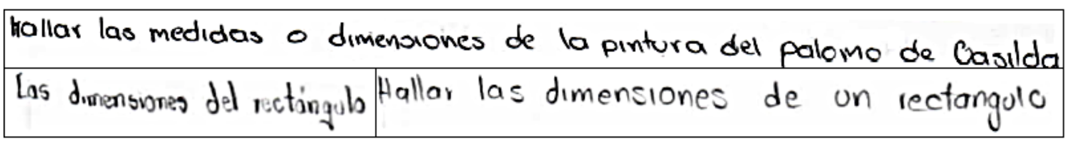


Imagen 63. Evidencia de respuesta completa de los estudiantes $(\mathrm{E}_{12}, \mathrm{E}_2, \mathrm{E}_4)$. ¿Qué le pide el problema? Actividad 3.

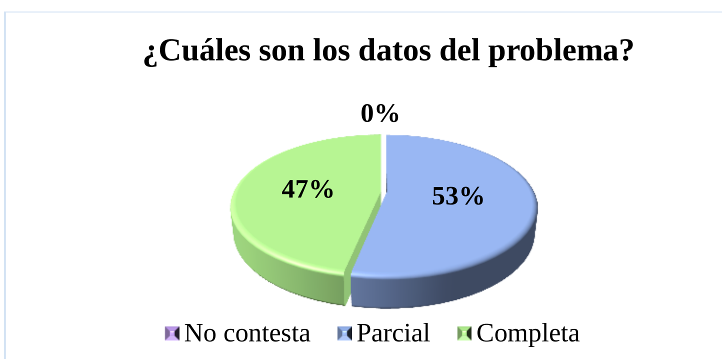
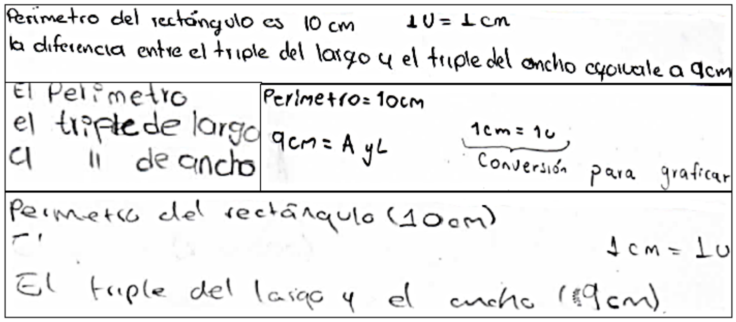


Figura 24. ¿Cuáles son los datos del problema? Actividad 3
Fuente: elaboración propia.

La figura muestra que el 53% de los estudiantes respondieron parcialmente reconociendo datos como: el perímetro del rectángulo, y las unidades de diferencia entre el largo y el ancho, tal es el caso de los estudiantes $(E_{12}, E_{14}, E_3 E_{10})$, ver imagen 63. Mientras que el 47% reconocieron todos los datos del enunciado sin importar si son o no necesarios, por ejemplo los estudiantes (E_1, E_7). Ver imagen 64.

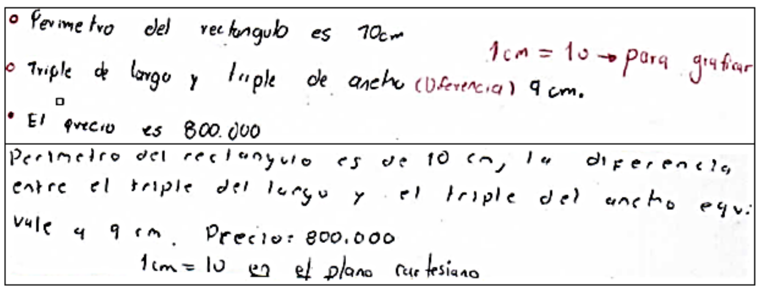

Perímetro del rectángulo es 10 cm 1U = 1cm
la diferencia entre el triple del largo y el triple del ancho equivale a 9cm

El Perímetro
el triple de largo
el ″ de ancho

Perímetro= 10cm
9cm = A y L
1cm = 1u
Conversión para graficar

Perimetro del rectángulo (10cm)
1cm = 1U
El triple del largo y el ancho (9cm)

Imagen 64. Evidencia de respuestas parciales de los estudiantes$(E_{12}, E_{14}, E_9, E_{10})$. ¿Cuáles son los datos del problema? Actividad 3.


° Perimetro del rectangulo es 10cm
° Triple de largo y triple de ancho (Diferencia) 9 cm.
1cm = 1u → para graficar
• El precio es 800.000

Perimetro del rectangulo es de 10 cm, la diferencia entre el triple del largo y el triple del ancho equivale a 9 cm. Precio: 800.000
1cm = 1U en el plano cartesiano

Imagen 65. Evidencia de respuestas completas de los estudiantes (E_1, E_7) ¿Cuáles son los datos del problema? Actividad 3.

Adicionalmente se observa que los estudiantes adecuar la escala para graficar el rectángulo o los ejes de un plano cartesiano. Por otro lado, para identificar los datos del problema, la estudiante (E_{14}) identifica que se está trabajando con sistemas de ecuaciones, y lo representa en el registro verbal, es decir, se evidenció la actividad de *tratamiento* dentro del registro verbal. Esto muestra que se le facilita la *conversión* del registro verbal al algebraico.

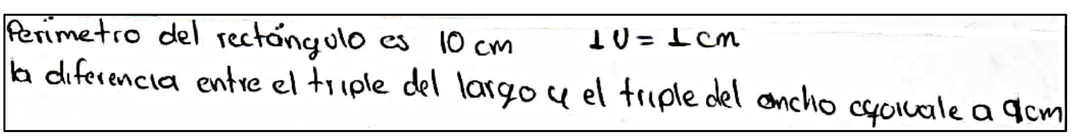
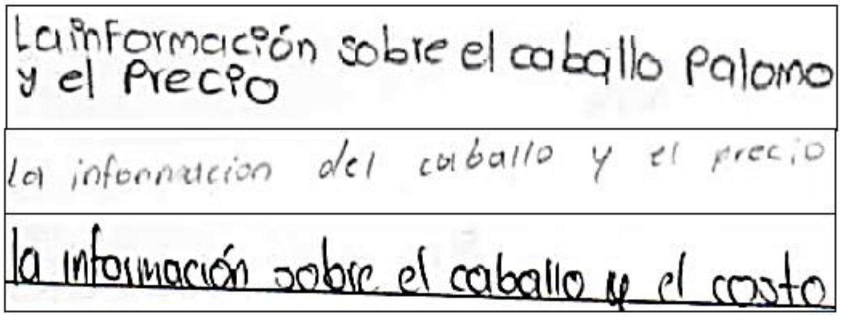

Perimetro del rectángulo es 10 cm 1U = 1cm
la diferencia entre el triple del largo y el triple del ancho equivale a 9cm

Imagen 66. Evidencia de tratamiento del sistema de ecuaciones en el registro verbal. Respuesta del estudiante (E_{14}). Actividad 3.

Todos los estudiantes participantes en la investigación reconocen que la información que le brinda el problema es relevante para su solución, al igual que la no requerida para la solución del mismo, que corresponde al precio de la obra de arte ($800.000) del emblemático y famoso caballo Palomo, donado por la señora Casilda Zafra al libertador Simón Bolívar.

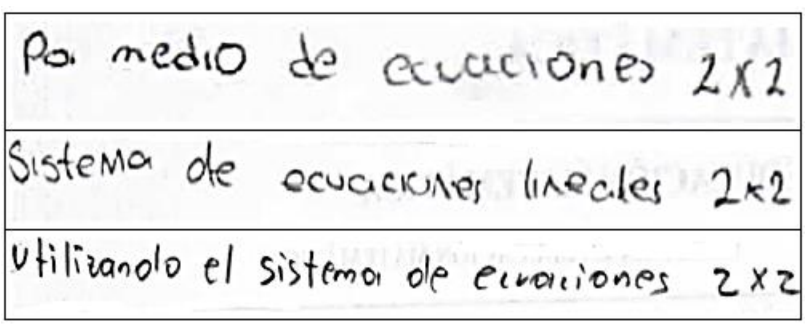

La información sobre el caballo Palomo y el Precio

la informacion del caballo y el precio

la información sobre el caballo y el costo

Imagen 67. Evidencia de información que brinda el problema que no se requiere para la solución del mismo. Actividad 3

Como plan para solucionar el problema, todos los estudiantes propusieron parcialmente una estrategia de solución muy superficial, por ejemplo, los (E_{10}, E_8, E_{11}) reconocieron que se está trabajando con sistemas de ecuaciones y manifestaron plantearlos en el registro algebraico inicialmente, pero no especificaron el método de solución. De otra forma, los (E_1, E_9, E_{14}) escribieron que utilizarían el método gráfico para la solución del sistema, e implícitamente identificaron que se debe formar un sistema de ecuaciones.


Po. medio de ecuaciones 2X2

Sistema de ecuaciones lineales 2x2

Utilizando el sistema de ecuaciones 2x2

Imagen 68. Evidencia de respuestas parciales de los estudiantes (E_8, E_{10}, E_{11}). Escriba un plan para solucionar el problema. Actividad 3

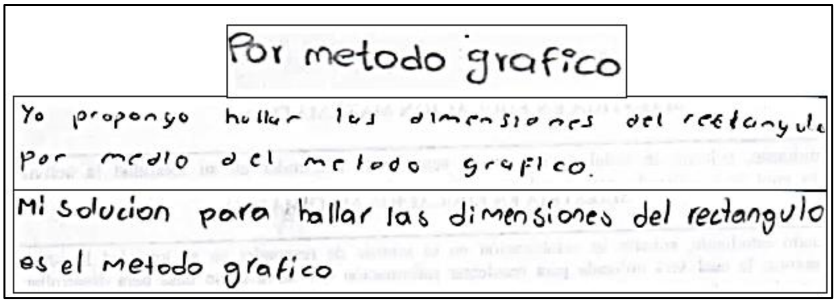


Imagen 69. Evidencia de respuestas parciales de los estudiantes (E_1, E_9, E_{14}). Escriba un plan para solucionar el problema. Actividad 3

Por otro lado, cinco de los estudiantes realizaron la representación gráfica de cada uno de los rectángulos, de acuerdo a la información del problema y de allí obtuvieron ecuaciones que conformarían el sistema, sin especificar el método de solución. Para la representación de los dos rectángulos, usaron la letra *"y"* indicando el ancho y la letra *"x"* para el largo, con la finalidad de relacionar los datos de las dimensiones para realizar la *conversión* del registro verbal al algebraico.

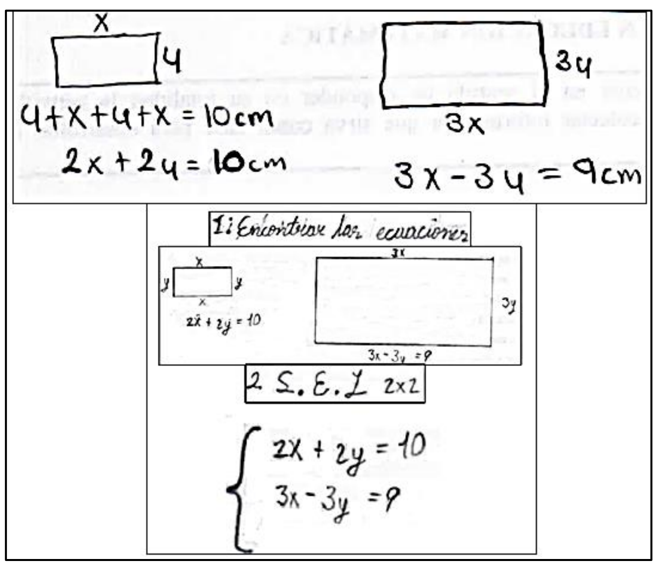
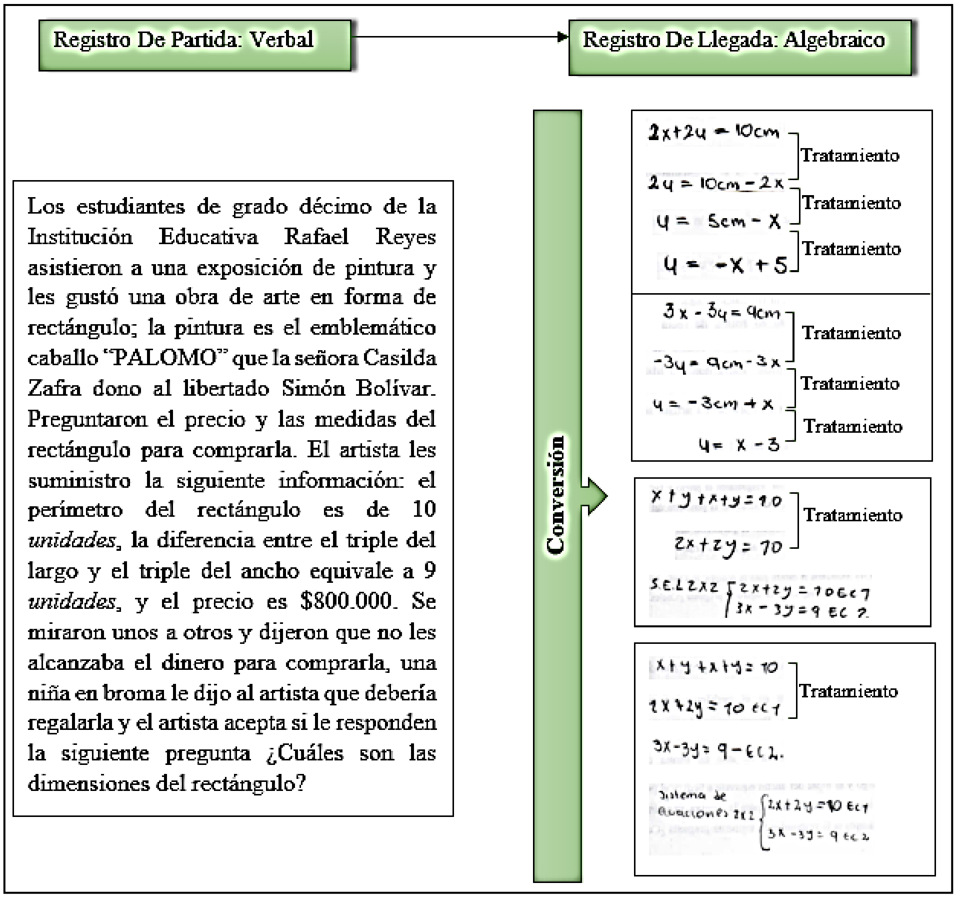


Imagen 70. Evidencia de respuestas parciales de los estudiantes (E_5, E_{12}). Escriba un plan para solucionar el problema. Actividad 3

De los estudiantes que no realizaron la representación gráfica de los rectángulos cuando se les pedía trazar un plan, cinco lo hicieron cuando inician a solucionar el problema. Resaltando los 15 participantes en la investigación lograron la actividad de *formación* en el registro algebraico del sistema de ecuaciones (véase esquema 6), con ayuda de la representación auxiliar de dos rectángulos en un registro gráfico que le permitiera visualizar la información del enunciado (dado en lenguaje natural), para evocar el objeto matemático de estudio.

Respecto a la actividad de *conversión* del registro verbal al algebraico, todos estudiantes realizaron correctamente, al igual que la actividad de *tratamiento* en el registro algebraico. Para el planteamiento del sistema de ecuaciones lineales 2×2 se observó que los estudiantes para la primera ecuación aplicaron el concepto de perímetro de un cuadrilátero, sumando los cuatro lados del rectángulo e igualando a 10 $(x + y + x + y = 10)$; también realizaron la actividad de *tratamiento* en la anterior ecuación dejándola expresada asi: $(2x + 2y = 10)$ y en la segunda ecuación, hacen la diferencia entre el largo y ancho; usaron la notación del número arábigo (tres) que acompaña a cada letra e igualando a 9 $(3x - 3y = 9)$. Como se observa en el *esquema 6*.



Esquema 6. Evidencia de formación en el registro algebraico y conversión del registro verbal al algebraico y tratamiento en registro algebraico. Actividad 3

Fuente: elaboración propia.

A continuación, se presenta la preferencia del registro que el estudiante utilizó para encontrar las dimensiones del rectángulo.

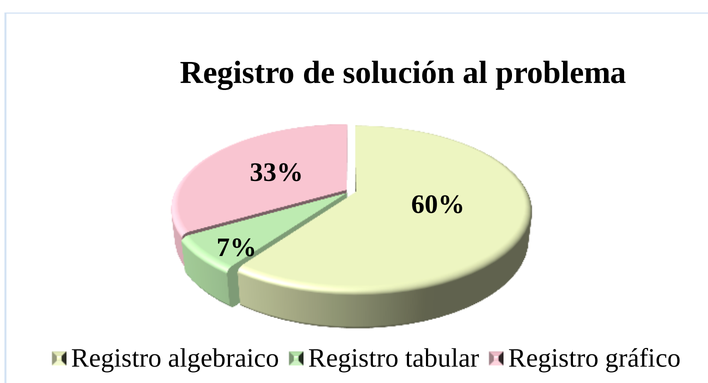


Figura 25. Registro de solución al problema. Actividad 3.

Fuente: elaboración propia.

La figura anterior muestra que el 33% de los estudiantes solucionaron el sistema de ecuaciones utilizando el registro gráfico como estrategia de solución, identificando la coordenada (x, y) de intersección entre las rectas, encontrando las dimensiones del rectángulo; donde el largo es de $4\,unidades$ y el ancho es de una $unidad$. Para llegar al registro gráfico primero hacen la actividad de *tratamiento* a cada una de las ecuaciones del sistema dejándolas explícitas, (*"y"* en función *"x"*), luego realizan una tabla de valores, donde *"x"* está en el intervalo $[-4,4]$ y reemplaza en cada ecuación, encontrando el valor de *"y"*, evidenciándose la *conversión* del registro algebraico al tabular. Por último, los estudiantes ubican en un plano cartesiano las coordenadas (x, y) de la tabla, obteniendo la gráfica del sistema de ecuaciones, mostrando la *conversión* del registro tabular al gráfico. Tal es el caso de (E_{14}).

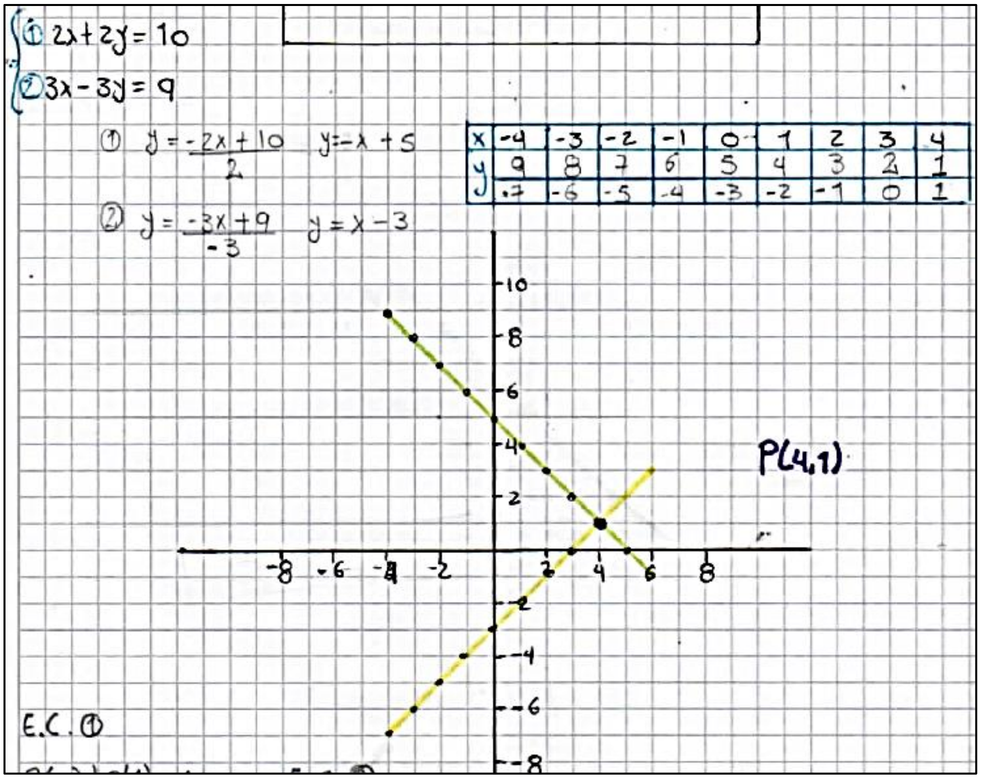
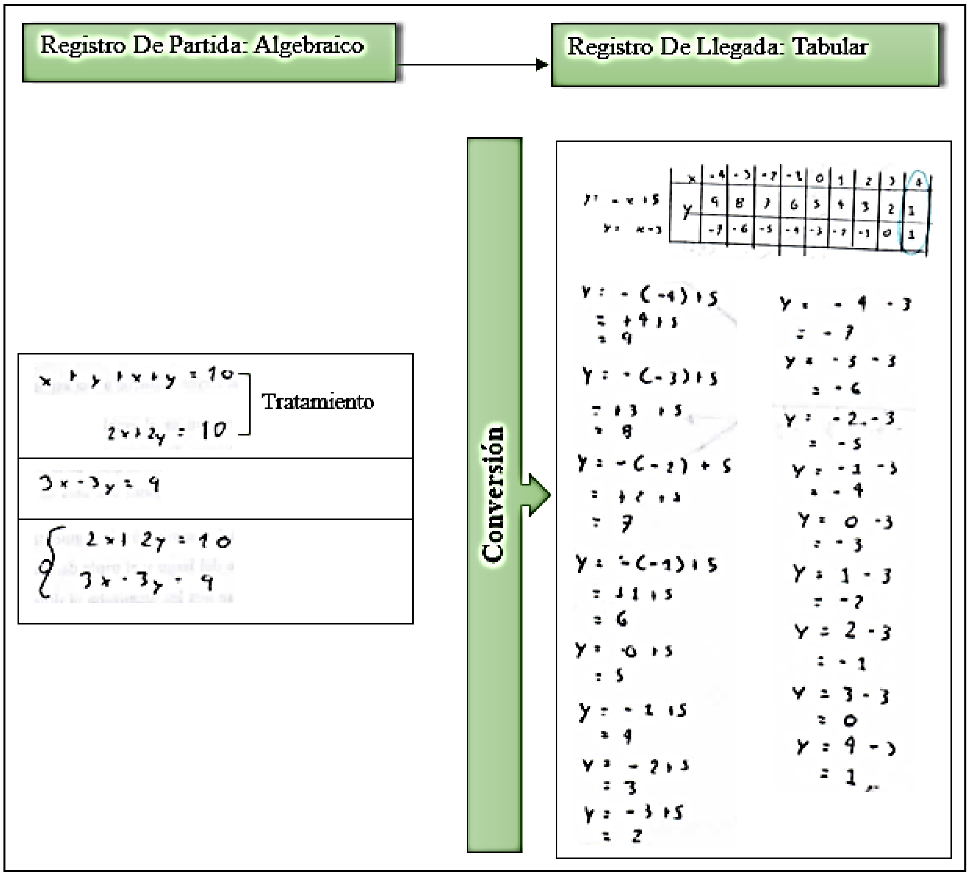


Imagen 71. Evidencia de la actividad cognitiva de conversión del registro algebraico al tabular, del tabular al gráfico, tratamiento en el registro algebraico y solución al problema por método gráfico. Respuesta del estudiante (E_{14}). Actividad 3.

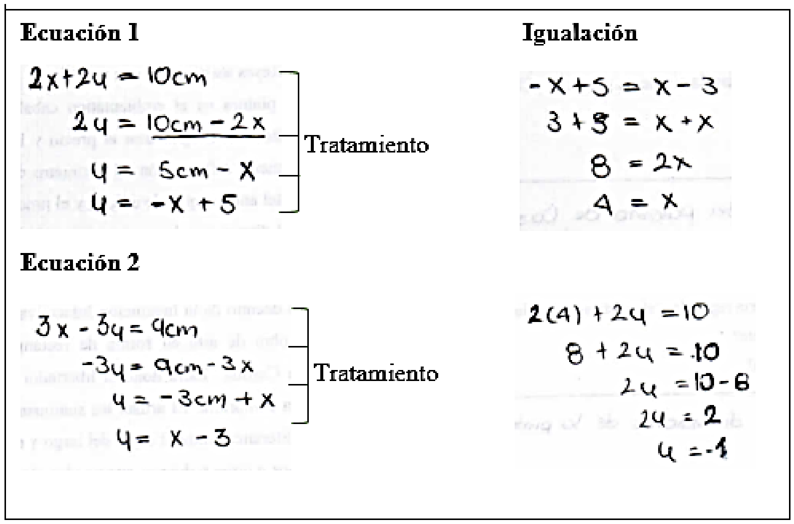
El estudiante (E_1) de manera personal empleó la representación tabular como estrategia de solución, identificando la coordenada (x, y) de intersección y es señalada con color azul en la tabla, encontrando las dimensiones del rectángulo; donde el largo $x = 4\,unidades$ y el ancho $y = 1\,unidades$. Para llegar al registro tabular realizó el mismo procedimiento de la estudiante (E_{14}) como se evidencia en el *esquema 8*. Según la *figura 25* este representa el 7%.



Esquema 7. Actividad cognitiva de conversión del registro algebraico al tabular, tratamiento en el registro algebraico y solución al problema en registro tabular. Respuesta del estudiante (E_1). Actividad 3

Fuente: elaboración propia.

Por último la *figura 25* muestra el 60% de los estudiantes que escogieron algún método algebraico para solucionar el sistema de ecuaciones. Por ejemplo (E_{12}) utiliza el método de igualación, para ello, primeramente, deja expresadas explícitamente cada una de las ecuaciones del sistema, (*"y"* en función de *"x"*), evidenciando la actividad de *tratamiento* en el registro algebraico. Luego, igualó las ecuaciones $y = y$, encontrando que $x = 4\,unidades$, finalmente reemplaza el valor de *"x"* en la ecuación 1 encontrando como resultado $y = 1\,unidades$. Ver *esquema 8*.



Esquema 8. Evidencia de estrategia de solución método de igualación y tratamiento en el registro algebraico. Respuesta del estudiante (E_{12}). Actividad 3

Fuente: elaboración propia.

Ahora se presenta el analisis del paso cuarto de Polya que es conocer si el estudiante examina la solución al problema

13 estudiantes respondieron la pregunta ¿la respuesta cumple con lo pedido en el problema? de manera parcial, no justifican las dimensiones del rectángulo, tal es el caso de los estudiantes (E_8, E_{12}).

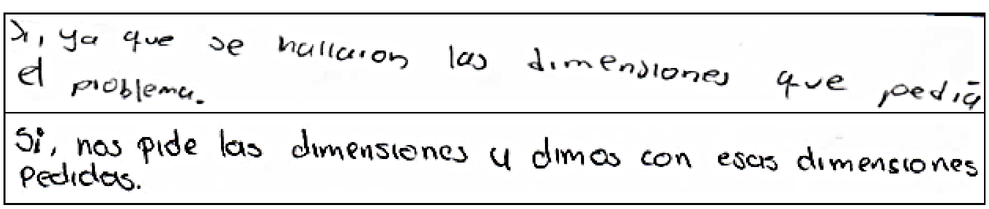


Imagen 72. Evidencia de respuestas parciales de los estudiantes (E_8, E_{12}). ¿La respuesta cumple con lo pedido en el problema? Actividad 3.

La respuesta a la pregunta ¿Su solución tiene sentido? 13 de los participantes dejan el espacio en blanco, mientras dos estudiantes responden de manera completa haciendo la verificación, dicho de otra manera, reemplazan los valores de las dimensiones tanto del largo como el ancho en cada una de las ecuaciones, evidenciando que se cumplen las igualdades, por ejemplo (E_6, E_{14}).

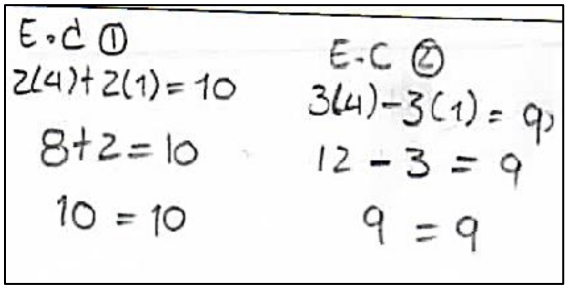


Imagen 73. Evidencia de respuesta completa de la estudiante (E_{14}). ¿Su solución tiene sentido? Actividad 3.

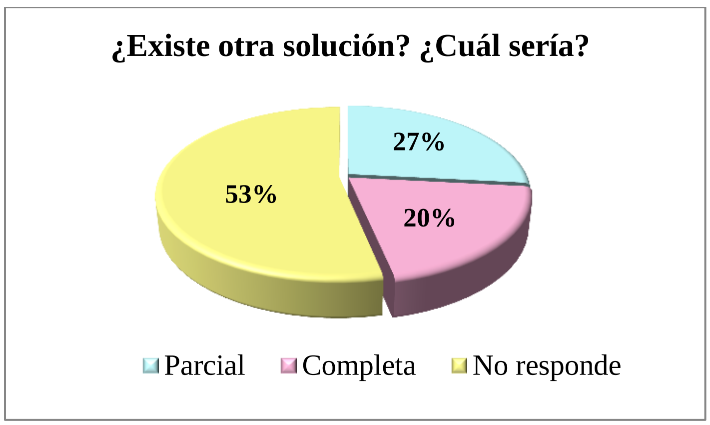


Figura 26. ¿Existe otra solución? ¿Cuál sería? Actividad 3

Fuente: elaboración propia.

En la *figura 26* indica que el 20% de los estudiantes responden de manera completa a la pregunta ¿Existe otra solución? ¿Cuál sería?, utilizando otro método de solución al sistema de ecuaciones, por ejemplo (E_1, E_{10}, E_{12}) reconocen que otra solución se halla por método gráfico, mostrando el sistema en el plano cartesiano e identificando el punto de intersección entre las rectas, sus respuestas coinciden con las antes encontradas, es decir $x = 4 \; e \; y = 1$. Los estudiantes (E_1, E_{10}), identificaron los interceptos de las rectas con los ejes del plano cartesiano para graficar. Se observó que hay un manejo perfecto en la *conversión* del registro algebraico al gráfico. Ver *imagen 74.*

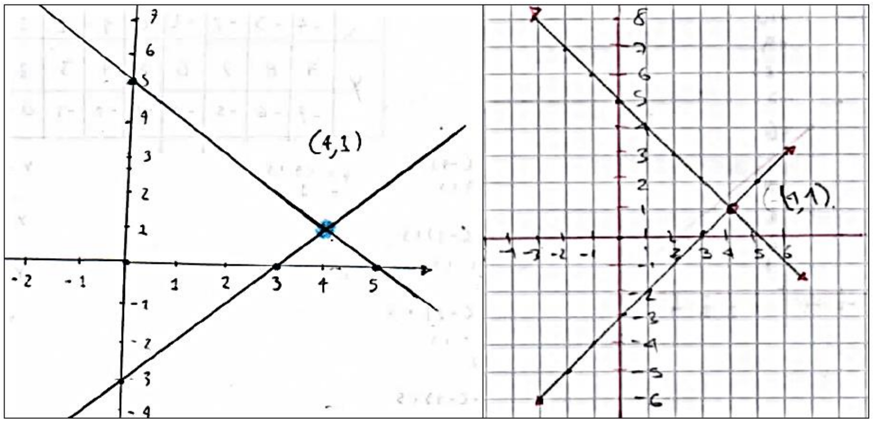


Imagen 74. Evidencia en el registro gráfico respuesta de los estudiantes (E_1, E_{10}) ¿Existe otra solución? ¿Cuál sería? Actividad 3.

Otra de las respuestas es la del estudiante (E_{12}), para graficar determinó en cada una de las ecuaciones el intercepto con el eje *"Y"* y el valor numérico de las pendientes con su respectivo signo, identificando que las rectas son perpendiculares (forman un ángulo de 90°). De igual manera mostró otra solución al problema, subrayando las dimensiones del rectángulo en una tabla de valores. En este proceso se evidenció inicialmente la *conversión* del registro algebraico al gráfico y luego *conversión* del registro gráfico al tabular.

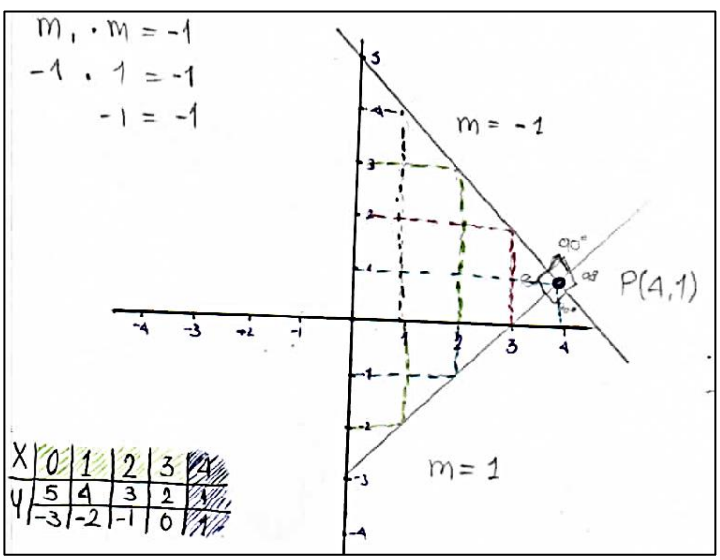


Imagen 74. Evidencia de otra respuesta para graficar el sistema de ecuaciones y conversión del registro gráfico al tabular. Respuesta del estudiante (E_{12}). Actividad 3.

La *figura 26* muestra *que* el 27% de los estudiantes respondió de manera parcial las preguntas ¿Existe otra solución? ¿Cuál sería?, por ejemplo, los estudiantes (E_2, E_4) especifican que existen los métodos algebraicos de igualación, sustitución, determinantes y gráfico para solucionar el sistema de ecuaciones lineales 2×2, pero no ejecutan ningún método mencionado. El porcentaje restante corresponde a los estudiantes que no responden, dejando en blanco el espacio.

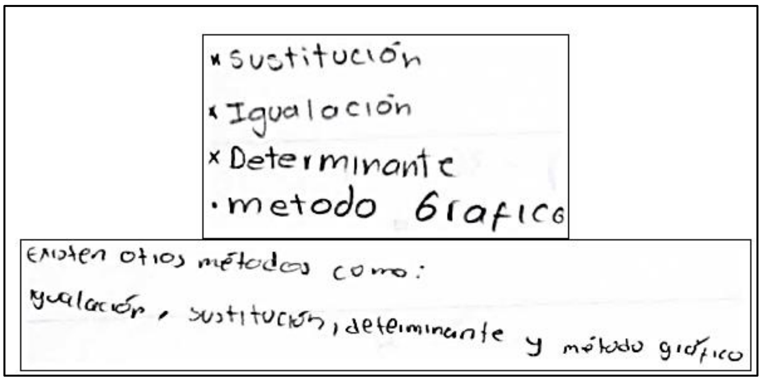


Imagen 75. Evidencia respuesta parcial de los estudiantes (E_4, E_8) ¿Existe otra solución? ¿Cuál sería? Actividad 3.

Se concluye que en la pregunta ¿Cuáles son los datos del problema? tres estudiantes inicialmente se acercan al planteamiento del sistema en el registro verbal, es decir, hicieron la actividad de *tratamiento* en este registro; reconociendo los datos y las variables del enunciado, como se observa en la *imagen 66.*

La actividad de *formación* en el registro algebraico es indispensable para otras *conversiones*, especialmente cuando se hace el cambio de registro del algebraico al tabular para luego graficar. Adicionalmente, la notación simbólica utilizada tanto para el largo como para el ancho, son asignadas de acuerdo a la forma convencional de los ejes de un plano cartesiano, es decir, la letra “x” en el rectángulo representa el largo y en el plano cartesiano indica el eje de las abscisas y la letra "y", que en el rectángulo representa el largo, indica el eje de las ordenadas en el plano cartesiano.

Actividad 4

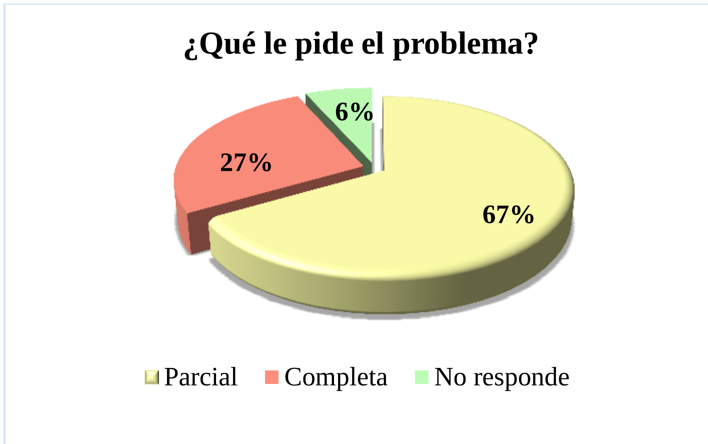
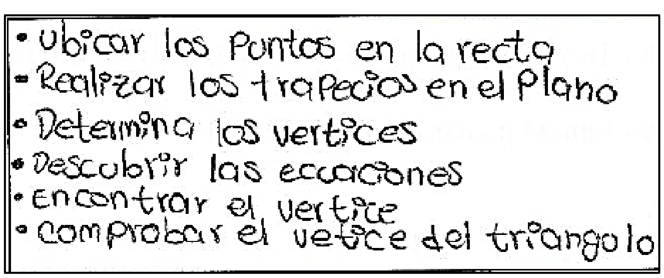


Figura 27 ¿Qué le pide el problema? Actividad 4

Fuente: elaboración propia.

La figura anterior muestra que el 27% de los estudiantes respondieron de manera completa y el 73% responde de manera parcial a la pregunta ¿Qué le pide el problema? por ejemplo los (E_{13}, E_{14}) especificaron que se debe graficar cada una de las tablas, dibujar trapecios en el plano cartesiano, representar sistema de ecuaciones, determinar vértices, y comprobar. Mientras los estudiantes (E_5, E_9, E_{12}) no tienen claro lo que le pide el problema indicando que solo es buscar el sistema de ecuaciones para encontrar las medidas de la bandera, las figuras que la conforman y los vértices.



- ubicar los Puntos en la recta
- Realizar los trapecios en el Plano
- Determina los vertices
- Descubrir las ecuaciones
- encontrar el vertice
- comprobar el vetice del triangolo

Imagen 76. Evidencia de respuestas completa del estudiante (E_{14})¿Qué le pide el problema? Actividad 4.

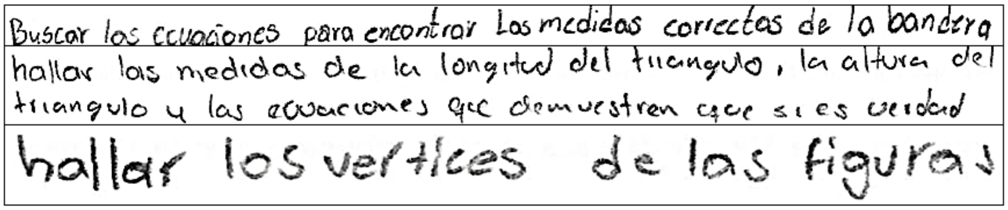


Imagen 77. Evidencia de respuestas parciales de los estudiantes (E_5, E_9, E_{12}). ¿Qué le pide el problema?

Actividad 4

Todos los estudiantes respondieron de manera parcial a la pregunta ¿Cuáles son los datos del problema? Por ejemplo: (E_{13}, E_{10}) reconocen las tablas como un dato indirectamente puesto que manifestaron que un dato es la gráfica y coordenadas deducidas de allí, por otro lado, los $(E_2, E_3, E_4, E_{11},)$ enfatizan que datos del problema son: el triángulo isósceles y dos trapecios (figuras que conforman la bandera). Los estudiantes no establecen como dato lo expuesto en el ítem *b* (el perímetro de la bandera sea 36 *unidades*, y la base mayor de cada trapecio rectangular es el doble de la longitud de la base del triángulo isósceles.).

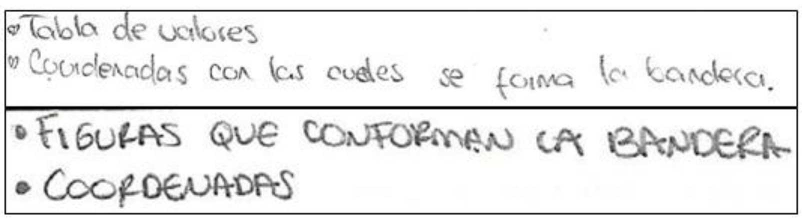


Imagen 78. Evidencia de respuestas parciales de los estudiantes (E_{13}, E_{10}) ¿Cuáles son los datos del problema?

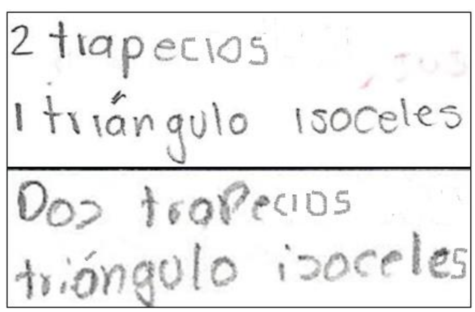


Imagen 79. Evidencia de respuestas parciales de los estudiantes (E_4, E_{11}) ¿Cuáles son los datos del problema?

Actividad 4

14 estudiantes no responden la pregunta ¿hay información que brinda el problema que no se requiere para la solución del mismo? dejaron el espacio en blanco. Sin embargo, la estudiante (E_{10}) manifestó que hay coordenadas de la tabla de valores que no son necesarios para solucionar el problema.

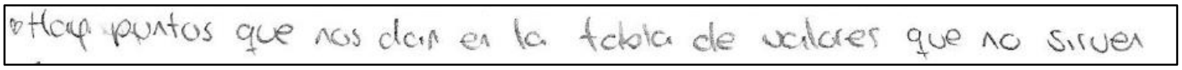

Hay puntos que nos dan en la tabla de valores que no sirven

Imagen 80. Evidencia de respuesta completa de la estudiante (E_{10}). ¿Hay información que brinda el problema que no se requieren para la solución del mismo? Actividad 4.

Todos los estudiantes proponen de manera parcial un plan para solucionar el problema, no fue muy claro, sin embargo dan a conocer sus planteamientos. Por ejemplo el estudiante (E_{12}) reconoce que se debe plantear sistemas de ecuaciones, al igual que la estudiante (E_4). Ver *imagen 81 y 82*.

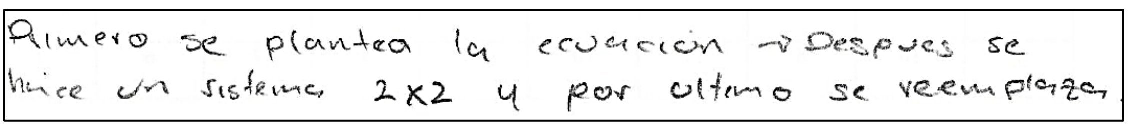

Primero se plantea la ecuacion → Despues se hace un sistema 2x2 y por ultimo se reemplaza

Imagen 81. Evidencia de respuesta parcial del estudiante (E_{12}). Escriba un plan para solucionar el problema. Actividad 4.

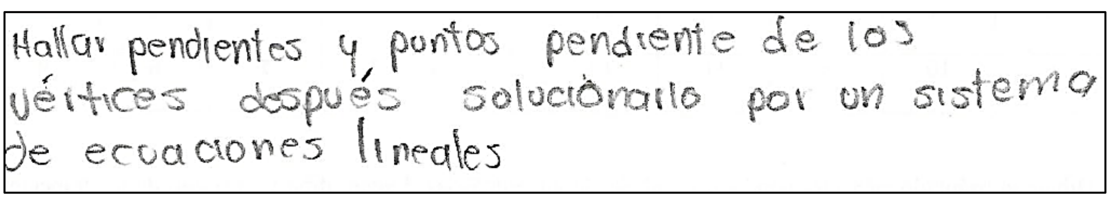
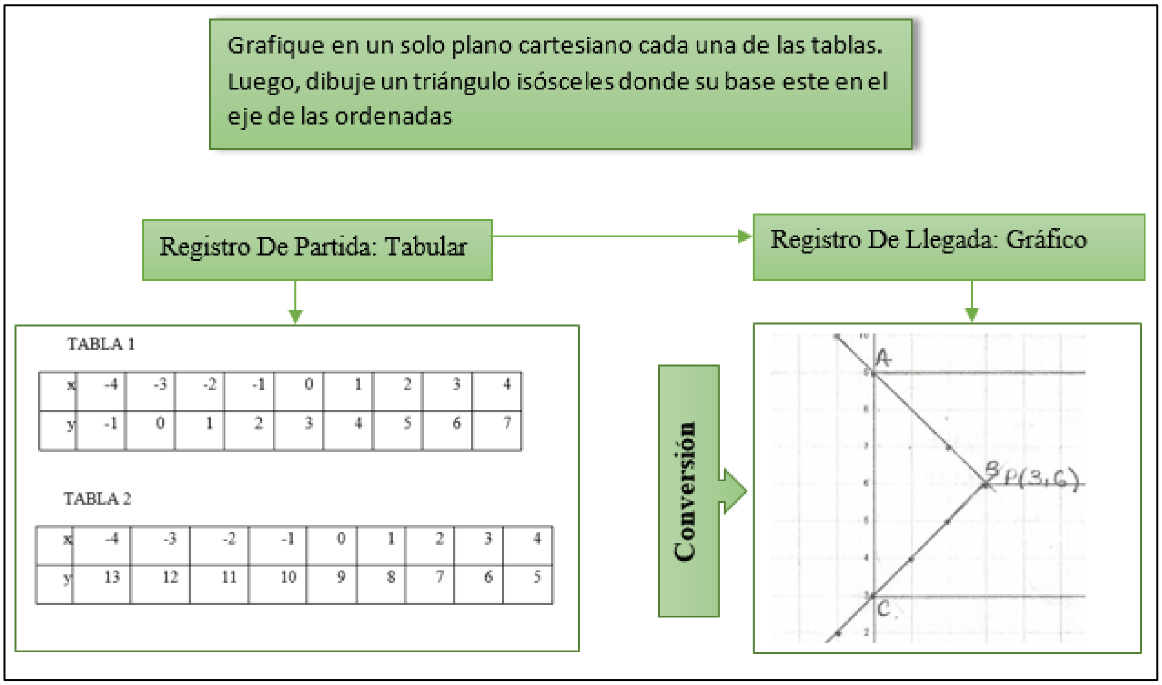

Hallar pendientes y puntos pendiente de los vértices después solucionarlo por un sistema de ecuaciones lineales

Imagen 82. Otra evidencia respuesta parcial escribir un plan para solucionar el problema. Respuesta del estudiante (E_4). Actividad 4.

A continuación, se presenta las soluciones de los estudiantes y las actividades cognitivas de *tratamiento* y *conversión* de los registros utilizados en los procesos.

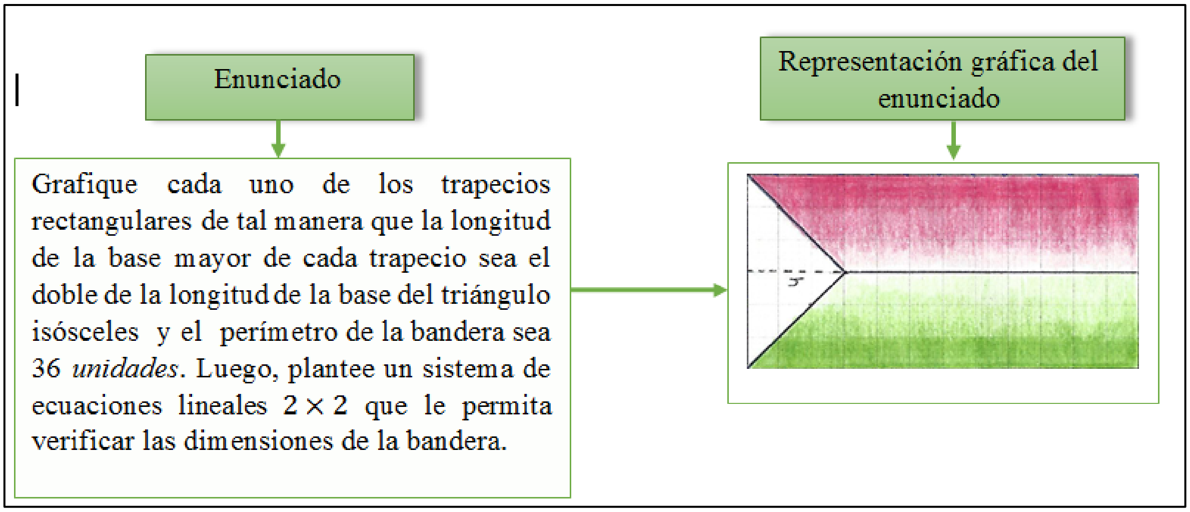
En la *conversión* del registro tabular al gráfico, los 15 estudiantes lograron formar el triángulo isósceles con base en el eje de las ordenadas, esto indica que ubicaron correctamente las coordenadas (x, y)de cada una de las tablas, se observó que no hubo dificultad en este paso de registro. Por ende se muestra que es un buen indicio para el desarrollo óptimo del problema. El siguiente esquema se observa tanto la actividad de *conversión* como la gráfica obtenida por el estudiante (E_7).



Esquema 9. Evidencia de conversión del registro tabular al gráfico. Respuesta del estudiante (E_7). Actividad 4

Fuente: elaboración propia.

Se evidenció la importancia de tener una representación auxiliar al momento de fortalecer la actividad cognitiva de *conversión* del registro verbal al algebraico; es decir, la gráfica de la bandera como ayuda para que planteamiento del sistema de ecuaciones lineales 2×2, como se muestra a continuación.



Esquema 10. Representación gráfica del enunciado como estrategia para plantear el sistema de ecuaciones lineales 2×2. Fuente: elaboración propia.

12 estudiantes representaron el sistema de ecuaciones en el registro algebraico. Los estudiantes, por ejemplo (E_{13}, E_{14}), utilizan las orientaciones del plano cartesiano para definir las variables del sistema, para la base mayor del trapecio rectangular utilizan la letra *"x"* (eje de las abscisas); para base del triángulo la letra *"y"* (eje de las ordenadas) y el perímetro 36 unidades.

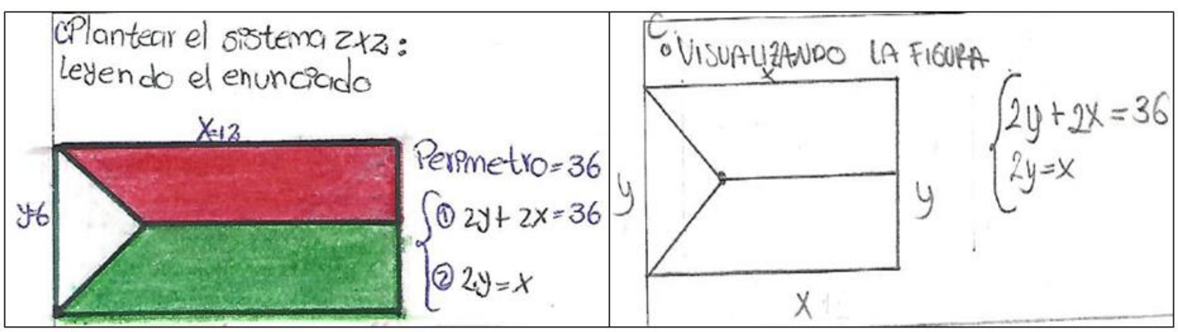


Imagen 83. Evidencia de la forma como plantearon el sistema de ecuaciones. Respuesta de las estudiantes (E_{13}, E_{14}). Actividad 4.

Mientras los $(E_2, E_3, E_4, E_7, E_8, E_{11})$ encontraron el sistema de ecuaciones directamente de la representación gráfica en el plano cartesiano, por ejemplo (E_2) utilizó las letras de acuerdo a los ejes del plan cartesiano, la letra *"x"* para indicar las abscisas y la letra *"y"* las ordenadas para indicar las variables del sistema. En el planteamiento de la primera ecuación, acudió al concepto de perímetro sumando los cuatro lados del rectángulo e igualando a 36, luego, hizo *tratamiento* en el registro algebraico trasformando la ecuación; y para la segunda ecuación, mediante la relación de la variable *"x"* con la variable *"y"*.

$$y + y + x + x = 36$$
$$2y + 2x = 36$$
$$x = 2y$$

*Imagen 84.*Evidencia de la forma como plantearon el sistema de ecuaciones. Respuesta del estudiante (E_2). Actividad 4

Todos los estudiantes identificaron los vértices del triángulo isósceles graficado en el plano cartesiano, el cual servían como un puente para hacer la *conversión* del registro grafico al algebraico, en el sentido de reconocer el intercepto de cada una de las rectas con el eje de las ordenadas en el plano cartesiano.

$$(0,9)\ ,\ (0,3)\ .\ (3,6)$$

Imagen 85. Evidencia de identificar los vértices del triángulo isósceles. Actividad 4.

De los 14 estudiantes que lograron hacer correctamente la *conversión* del registro gráfico al algebraico (ítem d), cinco plantean las ecuaciones del sistema así: primero hallando el valor de la pendiente de cada recta por medio de la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e identificando el punto de corte de cada recta con el eje *"y"* en el plano cartesiano, por ejemplo, (E_4) expresó el sistema *"y"* en función de *"x"* como se muestra a continuación.

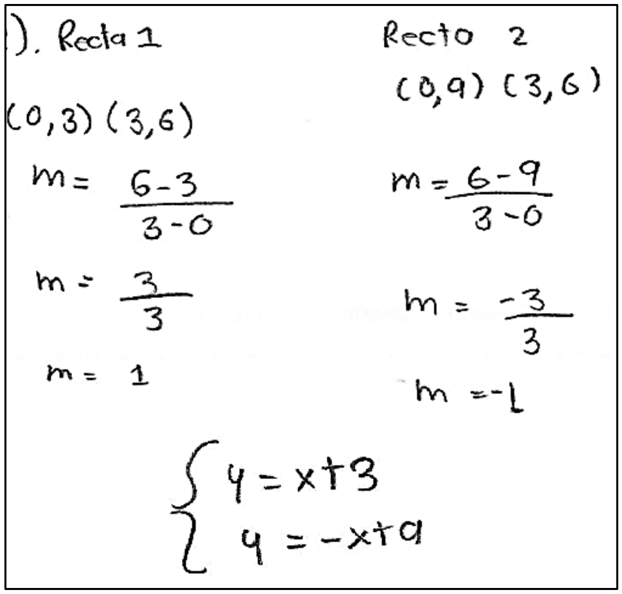


Imagen 86. Evidencia de conversión del registro gráfico al algebraico. Respuesta del estudiante (E_4). Actividad 4

El restante de los participantes encontraron el sistema de ecuaciones lineales 2×2, mediante la ecuación punto pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$ y para hallar el valor de pendiente de cada recta usaron la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, tal es caso de la estudiante (E_{13}), que además realizó los *tratamientos* correspondientes hasta dejar planteada cada ecuación de manera explícita, como se muestra a en seguida.

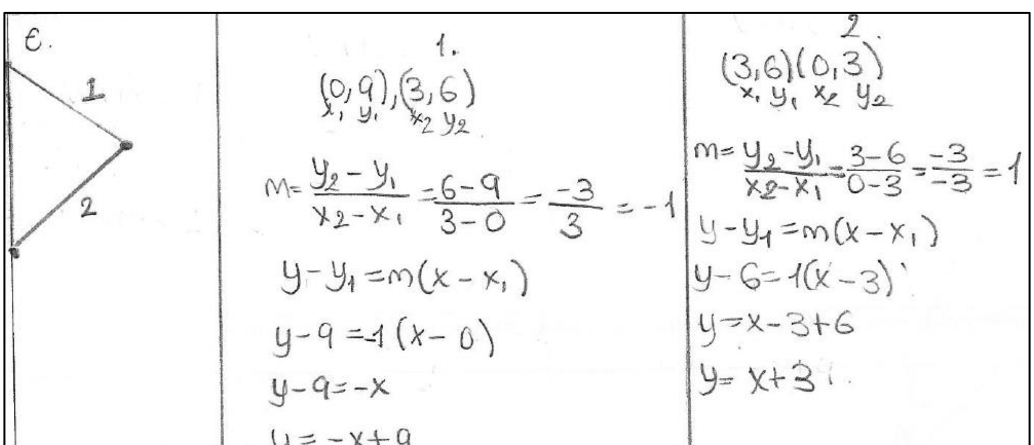
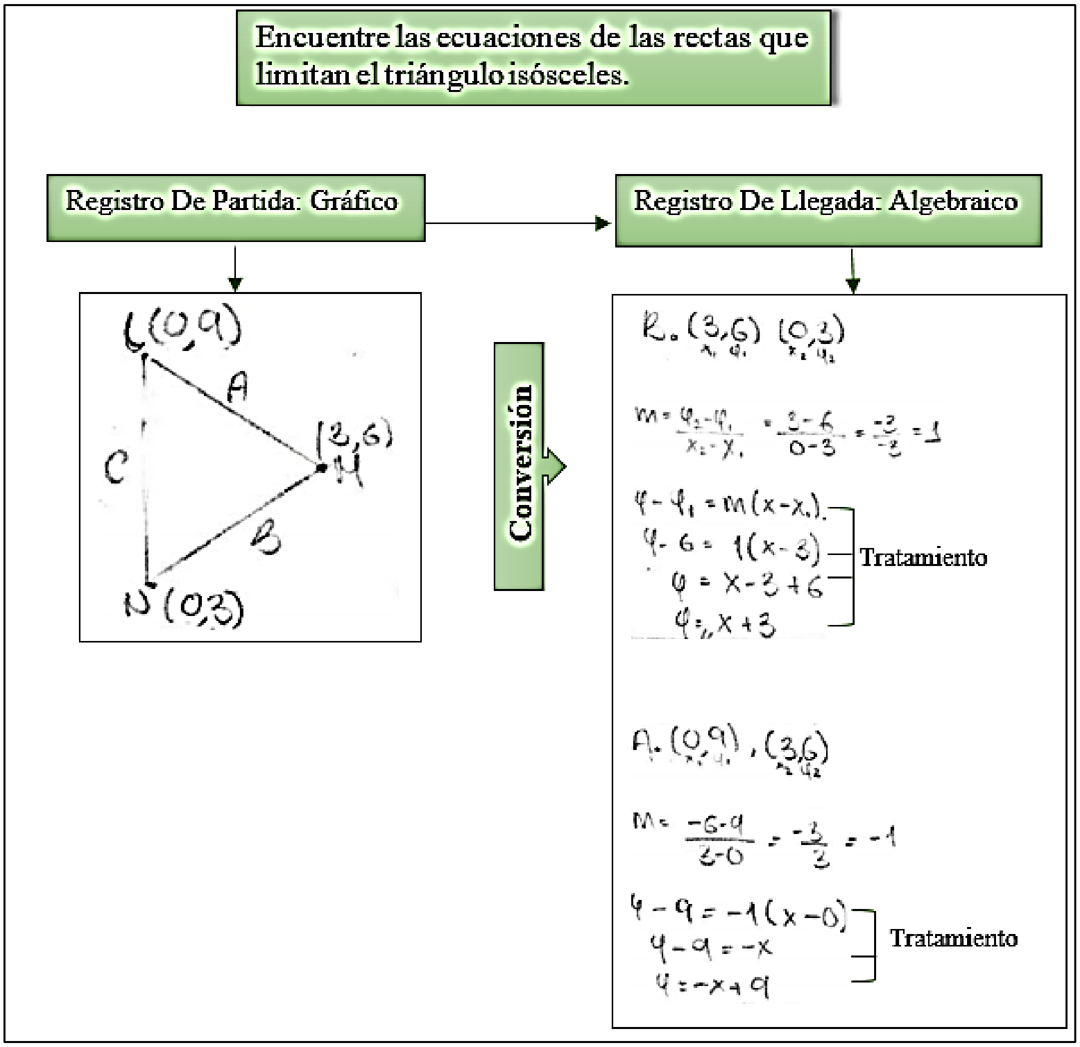


Imagen 87. Evidencia de otra conversión del registro grafico al algebraico. Respuesta de la estudiante (E_{13}) Actividad 4.

En seguida se presenta un esquema, evidenciándose la actividad cognitiva de *conversión*.



Esquema 11. Evidencia de conversión del registro gráfico al algebraico y tratamiento en el registro algebraico. Actividad 4.

Fuente: elaboración propia.

Los 15 estudiantes, logran identificar la coordenada (x, y) del vértice del triángulo isósceles que está hacia al interior de la bandera. Ver *imagen 88*.

Imagen 88. Evidencia del vértice del triángulo isósceles en el interior de la bandera. Actividad 4

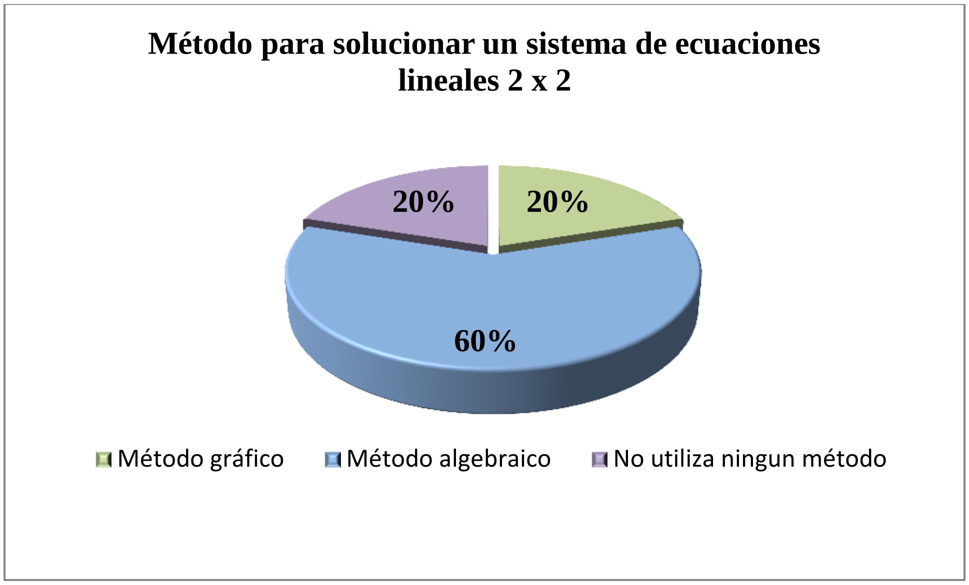
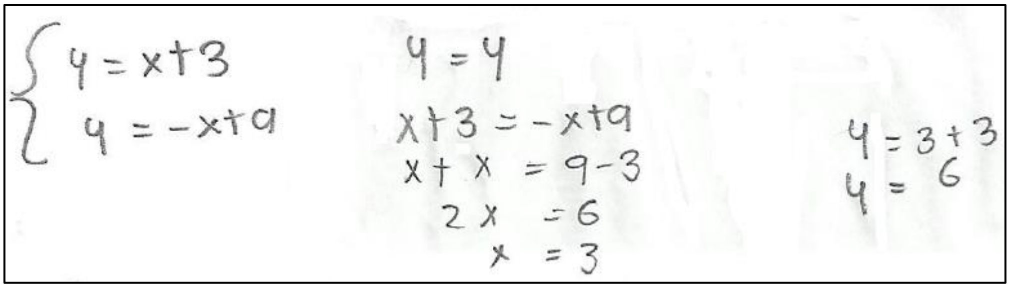


Figura 28. Método para solucionar un sistema de ecuaciones lineales 2 x 2. Actividad 4.

Fuente: elaboración propia.

La figura anterior muestra el método de preferencia que tienen los estudiantes para solucionar un sistema de ecuaciones. El 20% reconoció que se le está dando la solución al sistema por método gráfico con única solución, identificando la intersección de las rectas en el plano cartesiano. Por ejemplo, la estudiante (E_{14}) presentó el sistema de ecuaciones de manera implícita, y aclaró que reemplaza la coordenada $(3,6)$ en el sistema, además verificó que satisface al sistema, (ver *imagen 89*) por otro lado, el 60% de los participantes recurren al algún método algebraico para solucionar el sistema y verifican que la respuesta encontrada coincide con la presentada en el registro gráfico. Tal es el caso del estudiante (E_6) que halla el vértice del triángulo correspondiente al interior, acudiendo al método algebraico de igualación; planteó el sistema explícitamente (*"y"* en función de *"x"*), luego, igualó las *"y"*, dicho de otra manera $y = y$ encontrando el valor de *"x"*, finalmente reemplazó este valor, en la primera ecuación del sistema encontrando el valor de *"y"*, concluyó que la coordenada $(3,6)$, es la correcta. Como se muestra en seguida.



$$\begin{cases} y = x+3 \\ y = -x+9 \end{cases}$$

$y = y$

$x+3 = -x+9$

$x + x = 9-3$

$2x = 6$

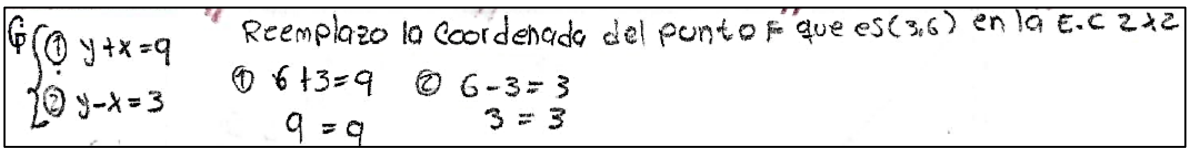
$x = 3$

$y = 3+3$

$y = 6$

Imagen 89. Evidencia de utilizar el registro algebraico para comprobar el vértice al interior de la bandera.

Respuesta del estudiante (E_6). Actividad 4.



G $\begin{cases} ① \ y+x=9 \\ ② \ y-x=3 \end{cases}$

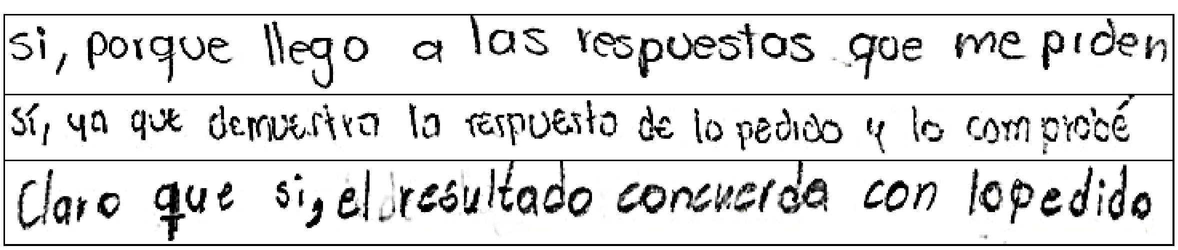
Reemplazo la Coordenada del punto F que es (3,6) en la E.C 2x2

① $6+3=9$ ② $6-3=3$

$9=9$ $3=3$

Imagen 90. Evidencia de utilizar el registro gráfico para comprobar el vértice al interior de la bandera. Respuesta del estudiante (E_{14}). Actividad 4.

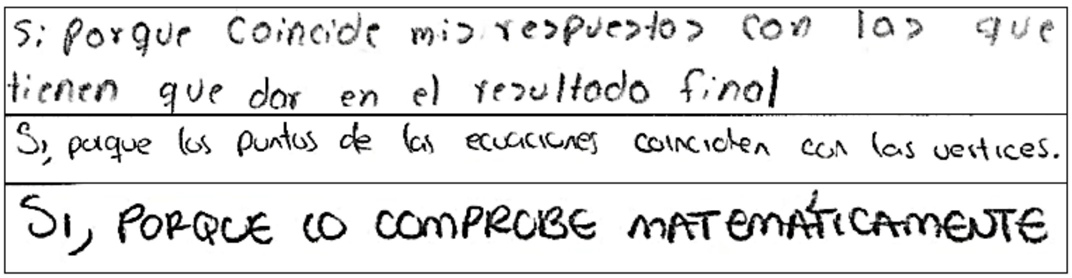
La respuesta a la pregunta ¿su respuesta cumple con lo pedido en el problema? Todos los estudiantes la presentan de manera parcial en el sentido que no justificaron: 1) la forma como lograron graficar la bandera, 2) el planteamiento de los sistemas de ecuaciones, 3) vértices del triángulo isósceles y 4) el vértice de coordenada (x, y) pertenece al interior de la bandera, por ejemplo, los estudiantes (E_1, E_5, E_9) responden de manera generalizada y poco argumentada.



si, porque llego a las respuestas que me piden
Sí, ya que demuestra la respuesta de lo pedido y lo comprobé
Claro que si, el resultado concuerda con lopedido

Imagen 91. Evidencia de respuesta parcial de los estudiantes (E_1, E_5, E_9) ¿su respuesta cumple con lo pedido en el problema? Actividad 4

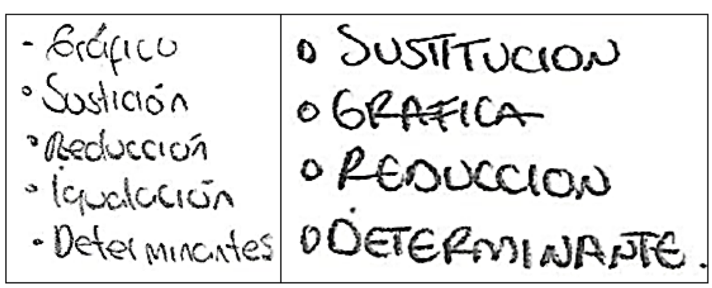
La respuesta a la pregunta ¿La solución tiene sentido? todos los estudiantes respondieron de manera parcial porque que no justifican que lograron graficar cada una de las rectas del sistema, teniendo en cuenta las tablas de valores, adicionalmente, no reemplazaron las dimensiones de la bandera en el primer sistema de ecuaciones planteado para comprobar que satisfacen el sistema, además, no manifestaron que para verificar el vértice de coordenada (x, y) del triángulo isósceles al interior de la bandera se reemplazaba el segundo sistema de ecuaciones, o utilizaron algún método algebraico para contrastar con la gráfica, por ejemplo (E_3, E_6, E_{11}) dan la respuesta de manera generalizada y poco explicada.



Si porque coincide mis respuestos con las que tienen que dar en el resultado final
Si, porque los puntos de las ecuaciones coinciden con las vertices.
SI, PORQUE LO COMPROBE MATEMÁTICAMENTE

Imagen 92. Evidencia de respuesta parcial de los estudiantes (E_3, E_6, E_{11})¿la solución tiene sentido? Actividad 4.

La respuesta a la pregunta ¿considera que existe otra solución para este problema? ¿Cuál sería? todos los estudiantes respondieron de manera parcial, en el sentido que conocen los nombre de los métodos para solucionar un sistema de ecuaciones, pero no hicieron algoritmos para encontrar la solución (E_{10}, E_{13}) mencionan, al método gráfico, y los métodos algebraicos como se muestra a continuación.



- Gráfico ° Sustición ° Reducción ° Igualación · Determinantes	o SUSTITUCION o GRAFICA o REDUCCION o DETERMINANTE.

Imagen 93. Evidencia de respuesta parcial de los estudiantes (E_{10}, E_{13}) ¿la solución tiene sentido? Actividad 4.

Validación

Es la confrontación de lo realizado a priori con lo trabajado a posteriori, de cada una de las actividades aplicadas en la fase de experimentación, es decir, la comparación entre los resultados esperados con los resultados encontrados.

Tabla 5

Confrontación de los resultados esperados con los encontrados en la actividad 1.

Actividad 1	
Ítem	Comparación entre los resultados esperados con los encontrados
a	Graficaron la figura de Minkowski como se tenía previsto.
b	Encontraron las parejas ordenadas (x, y) elaborando la tabla (as) de valores tal como se tenía previsto.
c	Encontraron los cuatro vértices del rombo tal como se esperaba**.** Sin embargo una estudiante no los destaco.
d	Se esperaba que los estudiantes identificaran el intercepto de la recta con el eje *"Y"* gráficamente, se encontró que la mayoría de los estudiantes no lo identificaron, esto indica que acudieron la expresión de la punto pendiente para encontrar cada ecuación, sin embargo utilizaron la expresión $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ para hallar la pendiente de cada recta.

Fuente: elaboración propia.

Tabla 6

Confrontación de los resultados esperados con los encontrados en la actividad 2.

Actividad 2	
Ítem	Comparación entre los resultados esperados con los encontrados
a	Se encontró una categoría emergente (tendencia para graficar el rectángulo en el plano cartesiano), sin embargo dieron respuesta a lo que indica el ítem. Se encontró que realizaron una *conversión* del registro gráfico al tabular para presentar las coordenadas, identificado las variables del problema.
b	Se encontró lo que se tenía previsto.

c	Se encontró que plantearon el sistema de ecuaciones en el registro algebraico, acudieron a la ecuación punto pendiente y utilizaron la expresión de la pendiente de la recta para hallar su valor Se esperaba que utilizaran el método grafico como estrategia para solucionar un sistema de ecuaciones lineales, pero se encontró que utilizaron métodos algebraicos, como el de igualación.

Fuente: elaboración propia.

Tabla 7

Confrontación de los resultados esperados con los encontrados en la actividad 3

Actividad 3	
Ítem	Comparación entre los resultados esperados con los encontrados
Encontrar las dimensiones del rectángulo	Se encontró que un estudiante logró mostrar las dimensiones del rectángulo en tres registros distintos, inicialmente en el registro algebraico utilizando el método de igualación, luego el registro gráfico y finalmente en el registro tabular. De igual manera se encontró que un estudiante da las respuesta al problema de manera tabular y contrasta tu respuesta con en el registro gráfico.

Fuente: elaboración propia.

Tabla 8

Confrontación de los resultados esperados con los encontrados en la actividad 4

Actividad 4	
Ítem	Comparación entre los resultados esperados con los encontrados
a	Se logró la *conversión* del registro tabular al algebraico
b	Los estudiantes se apoyaron en la construcción del triángulo isósceles y lograron relacionar en enunciado propuesto para graficar la bandera tal como se tenía previsto
c	Se encontró que plantearon el sistema de ecuaciones lineales 2×2 en el registro.
d	Determinaron las coordenadas (x, y) de los vértices del triángulo isósceles sin ninguna dificultad.

e	Se esperaba que plantear cada ecuación utilizando la expresión $y = mx + b$ donde identifiquen el intercepto de cada recta con el eje de las *"y"* gráficamente, y para hallar la pendiente de cada recta utilizar la expresión $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ con las coordenadas encontradas en el ítem *d.* Se encontró que os estudiantes en registro algebraico plantearon el sistema de ecuaciones lineales 2×2, mediante la expresión $y - y_1 = m(x - x_1)$ y mediante la expresión $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$; algunos estudiantes para hallar la pendiente de la recta tomaron las parejas ordenadas de la tabla de valores
g	Se espera que los estudiantes reconozcan que se está trabajando con un sistema de ecuaciones lineales 2×2, con única solución y lo planteen en el registro algebraico para comprobar la coordenada (x, y) del ítem *f* identificando que la intersección entre las rectas es la solución por método gráfico y sustituyan los valores de la coordenada en el par de ecuaciones cumpliendo las igualdades. Se encontró que 60% acudió al método algún algebraico para solucionar el sistema.

Fuente: elaboración propia.

Conclusiones y recomendaciones

A continuación se presentan las principales conclusiones, las cuales provienen del tema central de investigación: resolución de problemas relacionados con el objeto matemático sistema de ecuaciones lineales 2×2 y los registros semióticos de representación empleados por los estudiantes durante el proceso.

A continuación se presentan las conclusiones referentes al logro de cada uno de los objetivos específicos:

- En la fase preliminar análisis de texto, inicialmente éste plantea un registro verbal pretendiendo que el lector pase a un registro algebraico, adicionalmente utilizan registros algebraicos para explicar los diferentes métodos de solución a un sistema de ecuaciones lineales 2×2, posteriormente desarrollan algunos ejemplos enfatizando en la *conversión* del registro verbal al algebraico y hacen la actividad de *tratamiento*, en este último. En el trabajo propuesto para que el estudiante complemente su conocimiento, inicialmente se pretende un proceso de *conversión*, al pasar del registro verbal al algebraico, e igualmente, el texto propone otros ejercicios pretendiendo un tránsito del registro gráfico al algebraico y viceversa.

  Finalmente proponen unos problemas en registro verbal esperando que se pase a un registro algebraico, para dar solución por cualquier método a un sistema de ecuaciones lineales 2×2, también se propone un trabajo con el software Geogebra que es realizar su gráfica, hallar el punto de intersección y de acuerdo a ello hallar la solución al sistema, es decir, pasar del registro algebraico al gráfico a través de la mediación del Geogebra.

- Respecto a los registros que manejan los estudiantes de la I. E. Rafael Reyes en torno al objeto matemático sistema de ecuaciones lineales 2×2, se observó que la *conversión* del registro algebraico al gráfico ningún estudiante la realizó y la conversión viceversa el 73% no la realizaron. De manera general se concluye que existe dificultad en este tipo de conversiones. Por otro lado, hay un dominio en la *conversión* del registro algebraico al tabular, mientras que la conversión del tabular al algebraico existe un mayor grado de dificultad. Además, un 33% de los estudiantes realizan la *conversión* de registro verbal al algebraico, no reconocen el método grafico para resolver un sistema, pero sí identifican que para determinar la solución a un sistema de ecuaciones hay que encontrar los valores (x e y), que satisfacen las igualdades.
- Un porcentaje significativo de estudiantes en el cuestionario diagnóstico presentaron una noción inadecuada del objeto matemático sistema de ecuaciones lineales $2\ x\ 2$, puesto que graficaron en distintos planos cartesianos cada ecuación del sistema y para la *conversión* del registro algebraico al gráfico los participantes identificaron el intercepto de las rectas con el eje de las ordenadas en la representación algebraica y luego las relacionaron con la gráfica.
- En la actividad 1 lograron identificar el objeto matemático de estudio, cuando responden a las preguntas ¿Existe otra solución? ¿Cuál sería? relacionando el registro gráfico con el algebraico, además, reconocen el método gráfico para solucionar un sistema de ecuaciones pero no lo utilizan. Sin embargo, es en la actividad tres cuando algunos estudiantes le dan la importancia al método gráfico como alternativa para solucionar a un sistema de ecuaciones 2×2, encontrando la relación que hay entre los

dos registros, gráfico y algebraico. Siguiendo con esta actividad, cuando se les preguntaba ¿Cuáles son los datos del problema? tres estudiantes inicialmente se acercan al planteamiento del sistema en el registro verbal, es decir, hicieron la actividad de *tratamiento* en este registro; reconociendo los datos y las variables del enunciado, como se observa en la *imagen 64*.

- En la aplicación de las actividades uno, dos y tres, la *formación* fue indispensable para la *conversión* entre los registros: del gráfico al algebraico, del algebraico al tabular y luego al gráfico.
- La actividad cognitiva de *tratamiento* en el registro algebraico es primordial para facilitar la *conversión* del registro algebraico al tabular, dejando expresado el sistema de ecuaciones de manera explícita (variable dependiente en función de la independiente), cuando este es planteado implícitamente. De igual manera, para la *conversión* de registro algebraico a gráfico para identificar los interceptos de las rectas con los ejes coordenados y la orientación de la pendiente de cada recta.
- Respecto al método de preferencia de los estudiantes de la I. E. Rafael Reyes para solución a un sistema de ecuaciones lineales 2×2, en la actividad dos el 46% reconoció el método gráfico para la solución a un sistema. Mientras que el 47% utilizó algún método algebraico para solucionar el sistema. Esto no ocurrió en la actividad tres donde se observó que el 33% acuden al método gráfico como primer método para solucionar un sistema, mientras el 60% tienen una tendencia a utilizar el método algebraico para solucionarlo. Sin embargo, de los estudiantes que utilizaron el método algebraico inicialmente, cuando se les preguntó ¿Existe otra solución? ¿Cuál sería?, el 20% utilizó el método gráfico para presentar otra posible solución al problema.

- La teoría de Duval (1999), indica que cuando se emplean diferentes registros de representación, es posible adquirir la comprensión de un objeto matemático. En este caso, mediante la articulación de los registros semióticos favoreció inicialmente la identificación del objeto de estudio adecuadamente en los registros: verbal, algebraico, tabular y gráfico, diferenciándolo de los algoritmos utilizados en los métodos para solucionar un sistema de ecuaciones lineales 2×2.

Recomendaciones

- Es necesario que en la enseñanza del objeto matemático sistema de ecuaciones lineales 2×2 no se privilegie un solo registro de representación o presentarlo de manera separada de otros registros, debido a que la desarticulación no favorece que los estudiantes comprendan los conceptos matemáticos y por ende, no puedan modelar situaciones que les permita darle significado a su aprendizaje. Por consiguiente, se recomienda diseñar más actividades, donde se articule la *conversión* de los siguientes registros: tabular a verbal y luego a algebraico; algebraico a verbal luego a tabular, de gráfico a verbal y de verbal a tabular.
- Es necesario que los estudiantes a partir de sus vivencias diarias, formulen problemas y sean ellos quienes los puedan poner en correspondencia con los distintos registros de representación. Pues al momento de formular un problema, el estudiante está interiorizando la situación para luego encontrar un modelo que le permita dar su solución y significado.

Referencias Bibliográficas

Azañero Távara, L. (2013). *Errores que presentan los estudiantes de primer grado de secundaría en la resolución de problemas con ecuaciones lineales.* (Trabajo de grado de maestría). Pontificia Universidad Católica, Lima, Perú.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, & P. Gómez (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (Primera ed., pág. 148). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoaméricana, S.A. de C.V.

Alzate Correa , A. (2018). *Fortalecimiento del proceso de representación simbólica matemática en la solución de situaciones problema que involucran sistemas de ecuaciones lineales 2 x 2, por medio de una estrategia didáctica.* (Trabajo de grado de maestría). Universidad Nacional, Medellín, Colombia.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME, 9.1*, 143-168

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle.

D’ Amore, B., Fandiño, M. I., & Iori, M. (2013). *La semiótica en la didática de la matemática.* Bogotá , Colombia: Cooperativa editorial magisterio.

D´Amore, B. & Fandiño, M. (2009). *Área y perímetro. Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Editorial Magisterio.

D' Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática.* (B. P. Ángel , Trad.) Bogotá, Colombia: Cooperativa editorial magisterio, Universidad de Bologna

D´Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la matemática*. Editorial Reverté, S.A.

Eco, U. (1976). *A theory of Semiotics*. Indiana: Indiana University Press.

Figueroa Vera , R. E. (2013). *Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos varibles. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de la situaciones didácticas*. (Trabajo de grado de maestría). Pontificia Universidad Catolica, Lima, Perú.

García, J. (2013). *El concepto de función como una integración de los registros de representación.* (Trabajo de grado de maestría). Universidad Nacional de Colombia. Medellín.

González, J., & López, M. (2008/2009). *Álgebra lineal.* Sevilla, España: Universidad de Sevilla, departamento de álgebra.

García Daza, V. (2014). *Aplicación de la ingeniería didáctica como metodología para favorecer el desarrollo de competencias a partir de los sistemas de ecuaciones lineales.* (Trabajo de grado de maestría). Universidad Nacional, Palmira, Colombia.

Ibarra Olmos , S. E., Bravo Tapia , J. M., & Grijalva Monteverde , A. (2000-2001). El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza del cálculo diferencial. *Universidad de Sonora*, *México*,107-114.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares.* Cooperativa Editorial Magisterio. Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional (2006) *Estándares Básicos de competencias en Matemática.*

Marroquín Alvarado, C. R. (2009). *Construcción del concepto ecuaciones lineales con dos variables mediante visualización y registros de represetación en alumnos de primer* *semestre de ingeniería agroindustrial: secuencia didáctica*. (Trabajo de grado de maestría). Universidad Pedagogica Tegucigalpa, Honduras.

Maza Gómez, C. (2009). *Matemática en la antigua China*. Seviila, España: Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Sevila.

Meavilla Seguí, V. (2008). *Aspectos Históricos de las Matemáticas Elementales* (Segunda ed.). Zaragoza, España: Prensar Universitarias de Zaragoza.

Polya, G. (1965 (reimp, 2013)). *Cómo plantear y resolver problemas*. México : Trillas.

Piaget, J. (1968). *La formation du symbole chez l'enfant*. Neuchatel: Delachaux et Niestlé.

Piaget, J. (1970). *Genetic Epistemology*. New York: W. W. Norton.

Piaget, J. (1978). *Problemas de psicología genética*. Barcelona: Ariel.

Ruiz Socarras , J. M. (2008). Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la matemática. *Revista Iberoamerica de Educación* (n.° 47/3-25).

Rivera Macías, P. (2010). *Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas por alumnos de segundo grado de educación secundaria a tráves del uso del geogebra*. (Tesis de maestría).Universidad Autonoma de Aguascalientes, Cuidad de México, México.

Segura de Herrero, S. M. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 49-78.

Leguizamon Romero, J. F. (2017). *Evolución de los patrones de interacción comunicativa de los docentes de matemáticas*. (Tesis inédita de doctorado) Universidad Pedagógica y Tecnológica sede Tunja, Colombia.

Vygotsky, L. S. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Grijalbo.

Vygotsky, L. S. (1991). *Obras Escogidas*, Vol. 1 (Segunda edición,1997). Madrid:Visor.

Vygotsky, Lev. (1995) *Pensamiento y lenguaje*. *Teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas*. Traducción del original ruso: María Margarita Rotger. Ediciones Fausto.

Anexos

Anexo 1. Formato consentimiento informado a la rectoría de la institución.

Institución Educativa Rafael Reyes de Santa Rosa de Viterbo Boyacá

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia Sede Tunja

Maestría en Educación Matemática

Consentimiento Informado

A la firma del presente documento, acepto de manera voluntaria hacer parte de la investigación titulada "ALGUNOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA EN SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2×2 PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS". Además, señalo que he sido informada del procedimiento y propósito de mi participación en esta investigación, así como del uso que se le va a dar a los resultados, el cual cumple con los requerimientos éticos, de anonimato y confidencialidad. Adicionalmente, autorizo las intervenciones de aula donde se realizarán prueba diagnóstica, secuencias didácticas desde la perspectiva teórica los registros de representación semiótica y resolución de problemas, además video grabaciones de clases, fotos y entrevistas, en el grado décimo de la institución.

Atentamente,

Firma

Nombre

Documento de Identidad

Fecha

Anexo 1. Formato consentimiento informado a los padres de familia

Institución Educativa Rafael Reyes de Santa Rosa de Viterbo Boyacá

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia Sede Tunja

Maestría en Educación Matemática

Consentimiento Informado

Me dirijo a usted con el fin de solicitar su colaboración para autorizar recolectar información que permita desarrollar el proyecto de investigación titulado “ALGUNOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA EN SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2×2 PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS”. Se realizarán intervenciones de aula donde se aplicará prueba diagnóstica, secuencias didácticas desde la perspectiva de perspectiva teórica los registros de representación semiótica y resolución de problemas, además video grabaciones de clases, fotos y entrevistas, en el grado décimo de la institución.

Con la firma del presente documento, acepto que mi hijo(a) ______________________ ____participe de manera voluntaria en el desarrollo de la investigación. Además, señalo que he sido informado del procedimiento y propósito de dicha participación. El uso que se dará a los resultados, cumplen con los requerimientos éticos, de anonimato y confidencialidad.

Atentamente,
Firma

Nombre

____

Documento de Identidad

____

Fecha
